Die Bezeichnung der Eckpunkte in Polygonen, wie z.B. in einem Dreieck, erfolgt üblicherweise gegen den Urzeigersinn!

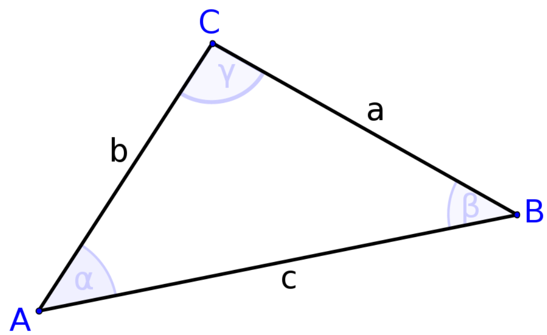


Abbildung: Das Dreieck Δ_{ABC}

Im Dreieck Δ_{ABC} gilt der Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Analog gibt es zwei weitere Varianten des Kosinussatzes in denen jeweils die Winkel α bzw β auftreten. Die beiden Varianten haben die gleiche Struktur wie die Gleichung oben.

1. **Aufgabe:**
   (a) Gib die übrigen zwei Varianten des Kosinussatzes an.
   (b) Begründe in wie fern der Kosinussatz den Satz des Pythagoras als Sonderfall enthält.
   (c) In einem Dreick sind die Seiten $a = 5$ und $b = 12$.
   Berechne die Seite c für den Fall (i) $\gamma = 90°$ und (ii) $\gamma = 72°$.

2. **Aufgabe:**
   Die Eckpunkte eines Dreiecks Δ_{ABC} im $\mathbb{R}^3$ seien $A\,(3 \mid -2 \mid 5)$, $B\,(4 \mid 1 \mid -6)$ und $C\,(-2 \mid 0 \mid 1)$.
   (a) Gib die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ an. Um welche Seiten des Dreiecks oben handelt es sich?
   (b) Berechne die Länge aller Seiten des Dreiecks Δ_{ABC}.
   (c) Berechne alle Innenwinkel des Dreiecks Δ_{ABC} mit dem Kosinussatz.
   (d) **Aufgabe:**
   Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit den Komponenten $a_k \in \mathbb{R}$ sowie $b_k \in \mathbb{R}$. Die Rechenoperation $\langle\ ,\ \rangle$ für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als
   $$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$$
   Beweise, dass $\langle\ ,\ \rangle$ eine symmetrische Bilinearform[1] ist.
   (e) Für die Rechenoperation $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ wird auch die Kurzschreibweise $\vec{a} \circ \vec{b}$ verwendet. Berechne die Skalarprodukte. Die Ergebnisse entsprechen jeweils einem Buchstaben $1 \to A$, $2 \to B$ usw. Ermittle das Lösungswort.

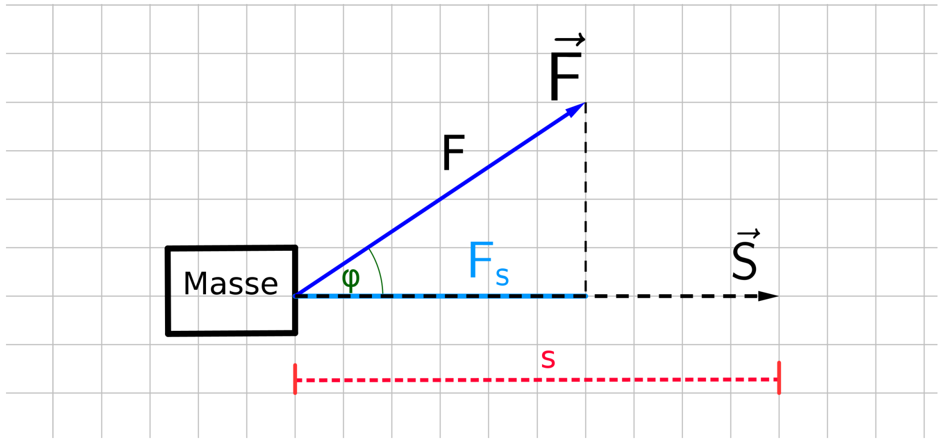
$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

3. **Aufgabe:**
   Sei nun $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{a} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ sollen wieder mit a_k, b_k und c_k bezeichnet werden wobei $k \in \{1, 2, 3\}$, also z.B. $\vec{a} = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)^\top$.
   (a) Zeichne die Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ in das Dreieck oben und zeige, dass die Gleichung $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$ gilt.
   i. Berechne c^2 durch beide Seiten der Gleichung aus Aufgabe 3a, also $\vec{c} \circ \vec{c}$ und $\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \circ \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$.
   ii. Beweise die Gleichung $\vec{a} \circ \vec{b} = a\,b\,\cos\phi$ mit dem Kosinussatz.

[1]Sei $k \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b}, \vec{a} \right\rangle$, sowie $\left\langle \vec{a}, k\vec{b} \right\rangle = k\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$ und $\langle \vec{a}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{w} \rangle$.

Eine Masse (z.B. ein Wagen) wird mit der Kraft $\vec{F}$ entlang der Strecke $\vec{s}$ gezogen. Hier bewirkt nur der zu $\vec{s}$ **parallele** Teil von $\vec{F}$ die gewünschte Bewegung. Wir bezeichnen den Betrag dieser Komponente mit F_s und die Länge der Wegstrecke mit s:



In der Physik gilt (für konstante Kräfte)[2]:

$$\textbf{Arbeit} = \textbf{Kraft} \cdot \textbf{Weg} = \mathbf{F_s} \cdot \mathbf{s}$$

Wir rechnen zunächst ohne Einheiten. Angenommen eine Einheit entspricht jeweils zwei Kästchen.

Die Länge s von $\vec{s}$ ist $s =$ ____m und es gilt $F_s =$ ____N

Für die Arbeit W gilt also:

$$W = F_s \cdot s = \_\_\_\_$$

1. **Aufgabe:**

   (a) Berechne den Winkel φ in der Abbildung oben.

   (b) Wie lässt sich F_s allgemein aus dem Betrag der Kraft F und dem Winkel φ berechnen?

   (c) Gib eine allgemeine Formel für die Arbeit W an, die vom Betrag F der Kraft, der Länge s der Strecke und dem Winkel φ zwischen $\vec{F}$ und $\vec{s}$ abhängt.

2. **Aufgabe:** (Rechnung mit Einheiten)

   (a) Die Länge F einer Kraft $\vec{F}$ ist gegeben durch $F = 20N$, die Kraft greift mit einem Winkel von $\varphi = 30°$ zur Horizontalen an. Dadurch wird ein Wagen die Strecke $s = 7m$ entlang der Horizontalen bewegt. Welche Arbeit W wurde verrichtet ?

   (b) In der Abbildung oben sind die Vektoren $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3N \\ 2N \end{pmatrix}$ und $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5m \\ 0 \end{pmatrix}$, berechne $\left\langle \vec{F}, \vec{s} \right\rangle$.

   (Anmerkung: man verwendet auch die Kurzschreibweise $\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle = \vec{a} \circ \vec{b}$.)

   (c) Durch die Kraft $\vec{F} = \begin{pmatrix} 3N \\ 4N \end{pmatrix}$ bewegt sich eine Masse entlang des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} 5m \\ 12m \end{pmatrix}$. Welche Arbeit W wird verrichtet?

[2] *Hinweis: Wird ein Körper in einem Kraftfeld entlang eines Weges γ bewegt, so ist dafür die Arbeit*

$$W = \int_\gamma \vec{F} \circ d\vec{s}$$

nötig. Falls $\vec{F}$ konstant und γ eine Strecke der Länge s ist erhält man $W = \vec{F} \circ \vec{s} = F\cos(\varphi) \cdot s = F_s \cdot s$ wobei F_s die Kraftkomponete in Wegrichtug $\vec{s}$ ist.