Definition:
Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit den Komponenten $a_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \in \mathbb{R}$. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gegeben durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Satz:
Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht.

Beweis:

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

offenbar steht $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{a}$

$$\begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_2b_1b_3 - b_1b_2a_3 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0$$

und $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf $\vec{b}$ $\square$

Weitere Eigenschaften des Vektorprodukts:

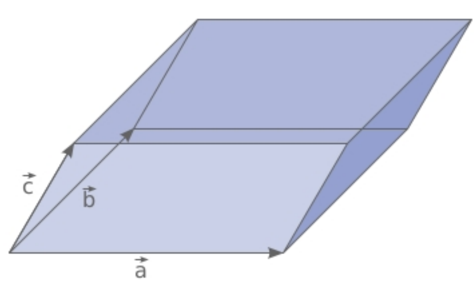
Für den Betrag $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ des Vektorprodukts gilt

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\varphi$$

dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Insbesondere ist durch $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ der **Flächeninhalt** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gegeben.

Spatprodukt:

Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Das Spatprodukt der Vektoren ist definiert als $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}$.
Wenn $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, so spannen die Vektoren ein Parallelepiped (Spat) auf:



Der Betrag des Spatproduktes gibt das Volumen des Spats an:

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right|$$

Normalenvektor über ein Gleichungssystem berechnen:

Seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit den Komponenten $a_k \in \mathbb{R}$ und $b_k \in \mathbb{R}$. Gesucht ist ein Vektor $\vec{n}$, der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht. Sei $\vec{n} = (x \mid y \mid z)^\top$ dann muss offenbar $\vec{a} \circ \vec{n} = 0$ und $\vec{b} \circ \vec{n} = 0$ gelten, also:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Wenn man x eliminieren will ergibt sich durch geeignete Multiplikation

$$\begin{aligned} a_1b_1x + a_2b_1y + a_3b_1z &= 0 \\ a_1b_1x + a_1b_2y + a_1b_3z &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$(a_2b_1 - a_1b_2)\,y + (a_3b_1 - a_1b_3)\,z = 0.$$

Für y erhält man

$$y = -\frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_2b_1 - a_1b_2}z = \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}z$$

Bei zwei Gleichungen mit drei Variablen darf eine Variable gewählt werden. Wähle

$$z = a_1b_2 - a_2b_1 \tag{3}$$

oder $z = (a_1b_2 - a_2b_1)\,t$ mit $t \in \mathbb{R}$. Dadurch wird

$$y = a_3b_1 - a_1b_3$$

und es fehlt nur noch die $x-$Komponente. Wir beginnen wieder oben bei (2), aber eliminieren jetzt die $y-$Koordinate:

$$\begin{aligned} a_1b_2x + a_2b_2y + a_3b_2z &= 0 \\ a_2b_1x + a_2b_2y + a_2b_3z &= 0 \end{aligned}$$

es ergibt sich

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x + (a_3b_2 - a_2b_3)\,z = 0$$

und damit

$$x = -\frac{a_3b_2 - a_2b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}z = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}z \overset{(3)}{=} a_2b_3 - a_3b_2.$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ ist also

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$