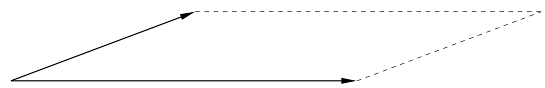
Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ steht sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht. Für den Betrag $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ des Vektorprodukts gilt

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\, \vec{a} \,||\, \vec{b} \,| \sin\varphi \tag{1}$$

dabei ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Insbesondere ist durch $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ der **Flächeninhalt** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms gegeben:

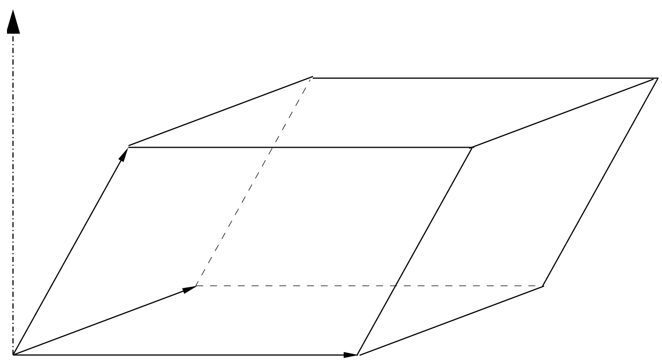


Seien $\vec{v}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Nach Definition des Skalarprodukts ist

$$\vec{v} \circ \vec{c} = |\, \vec{v} \,||\, \vec{c} \,| \cos\theta \tag{2}$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{c}$ ist.

Spatprodukt:
Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Der von den drei Vektoren aufgespannte Parallelepiped (Spat)

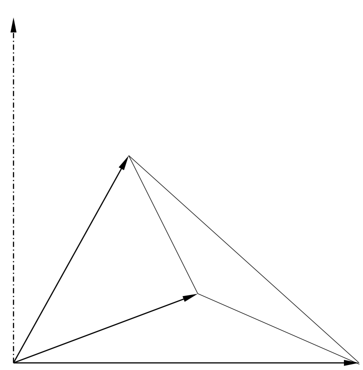


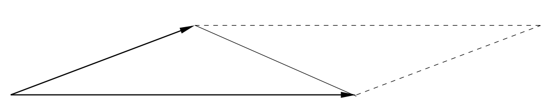
hat das Volumen

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| \tag{3}$$

Leite aus (1) und (2) die Volumenformel (3) her.

Tetraeder:
Ein Tetraeder wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt, siehe Abbildung.



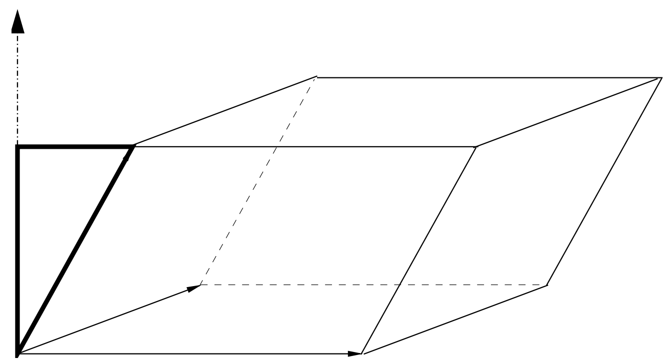


Die Grundfläche G ist ein Dreieck. G ist die Hälfte der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm-Fläche. Sei h die Höhe zur Grundfläche G, dann gilt für das Volumen des Tetraeders $V = \frac{1}{3}Gh$. Zeige, dass für das Tetraeder-Volumen gilt:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| \tag{4}$$

Spatvolumen:

Sei θ der Winkel zwischen $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$ (zeigt senkrecht nach oben) und $\vec{c}$ (zeigt schräg nach oben), siehe Abbildung:



Im fett markierten Dreieck gilt:

$$\cos\theta = \frac{AK}{HY} = \frac{h}{\mid \vec{c} \mid} \quad \Longrightarrow \quad h = \mid \vec{c} \mid \cos\theta$$

wobei h die Höhe des Spats ist. Mit der Formel (2) für das Skalarprodukt folgt:

$$V = G \cdot h = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \cdot \mid \vec{c} \mid \cos\theta = \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \circ \vec{c} \tag{5}$$

Das Volumen ist immer positiv, also folgt Gleichung (3). $\square$

Tetraedervolumen:

Offensichtlich gilt $G = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right|$. Aus $V = \frac{1}{3} G h$ folgt dann mit (5) direkt

$$V = \frac{1}{6} \left(\vec{a} \times \vec{b} \right) \circ \vec{c}$$

Das Volumen ist immer positiv, also folgt Gleichung (4). $\square$