Nach Definition des Skalarprodukts

$$\vec{a} \circ \vec{b} = ab\cos\varphi$$

sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht (orthogonal), wenn das Skalarprodukt Null wird, also

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0}$$

Im $\mathbb{R}^3$ bedeutet das für die Komponenten a_k und b_k von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ also

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

1. **Aufgabe:**

   (a) Finde einen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ der orthogonal zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ist.

   (b) Finde einen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ der orthogonal zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ist.

   (c) Finde einen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ der orthogonal zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 4 \\ 2,5 \end{pmatrix}$ ist.

   (d) **Aufgabe:**
   Beweise: Wenn $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist, so ist auch $k\vec{n}$ mit $k \in \mathbb{R}$ orthogonal zu $\vec{v}$ und $\vec{w}$.

2. **Aufgabe:**
   Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$. Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist gegeben durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

   (a) Beweise, dass das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

   (b) Berechne mit (1) das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. **Aufgabe:**
   Eine Kohlenflötz-Ebene ist durch die Punkte $A\,(3 \mid 1 \mid -5)$, $B\,(4 \mid 6 \mid -7)$ und $C\,(-4 \mid 10 \mid -6)$ gegeben.
   Ein Bohrturm befindet sich im Punkt $P\,(10 \mid 12 \mid 0)$ auf der Erdoberfläche.

   (a) In welche Richtung muss man vom Punkt P aus bohren, um auf kürzestem Weg zur Ebene zu kommen? Gib die Gleichung der Geraden an, entlang der dann gebohrt wird.

   (b) Wie lässt sich die Kohlenflötz-Ebene in Parameterform darstellen?

4. **Aufgabe:**
   Finde einen Vektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ der senkrecht zur Ebene

$$E(r,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   steht. (Dieser Vektor ist der **Normalenvektor** von E)