

Sei $a \in \mathbb{R}$, gegeben ist die Ebenenschar

$$E_a : -20ax_1 - 5ax_2 + (7a + 1)x_3 = 3 - 19a$$

1. Ist die Ebene $H_1 : 4x_1 + x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{34}{5}$ in der Schar E_a enthalten?

2. Ist die Ebene $H_2 : -20x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -34$ in der Schar E_a enthalten?

1) Vergleich der Koeffizienten vor x_2 ergibt $-5a = 1$ also $a = -1/5$. Einsetzen in E_a :

$$\begin{aligned} E_{-\frac{1}{5}} : -20 \left(-\frac{1}{5}\right) x_1 - 5 \left(-\frac{1}{5}\right) x_2 + \left(7 \left(-\frac{1}{5}\right) + 1\right) x_3 &= 3 - 19 \left(-\frac{1}{5}\right) \\ &4x_1 + x_2 - \frac{2}{5}x_3 = \frac{34}{5} \end{aligned}$$

2) Vergleich der Koeffizienten vor x_1 ergibt $a = 1$, einsetzen in E_a aber:

$$-20x_1 - 5x_2 + 8x_3 = -16 \quad \Rightarrow \quad E_1 \neq H_2$$

Folgt daraus nun, dass H_2 nicht in E_a enthalten ist ???

NEIN: Wegen $H_2 = -5H_1$ beschreiben H_1 und H_2 die **gleiche Ebene!**

Ansatz $E_a = \lambda H$ funktioniert immer!

$$E_a : -20ax_1 - 5ax_2 + (7a + 1)x_3 = 3 - 19a$$

$$\lambda H : -20\lambda x_1 - 5\lambda x_2 + 2\lambda x_3 = -34\lambda$$

Koeffizientenvergleich ergibt: (I) $a = \lambda$, (II) $7a + 1 = 2\lambda$, (III) $3 - 19a = -34\lambda$

Einsetzen von (I) in (II): $7a + 1 = 2a \Rightarrow a = -\frac{1}{5}$, passt auch in (III)

H_2 ist in E_a enthalten! Es ist

$$H_2 = -5 E_{-\frac{1}{5}}$$