Satz:
Sei P ein Punkt im $\mathbb{R}^3$ mit dem Ortsvektor $\vec{p} = \vec{0P}$. Ferner sei $t \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ und g eine Gerade mit Ortsvektor $\vec{v}$ und Richtungsvektor $\vec{w}$.

Der Abstand d vom Punkt P zur Geraden $g: \ \vec{x} = \vec{v} + t\vec{w}$ ist durch

$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{v}) \times \vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

gegeben.

Beweis:

Das Dreieck mit Grundseite $|\vec{w}|$ und Höhe d hat die Fläche:

$$A = \frac{1}{2}\,|\vec{w}|\,d \tag{1}$$

Das von den Vektoren $\vec{p} - \vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannte Parallelogramm hat die Fläche $2A = |(\vec{p} - \vec{v}) \times \vec{w}|$. Damit folgt für die Fläche des Dreiecks:

$$A = \frac{1}{2}\,|(\vec{p} - \vec{v}) \times \vec{w}| \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) erhält man:

$$d = \frac{|(\vec{p} - \vec{v}) \times \vec{w}|}{|\vec{w}|}$$

Bemerkung:

Die Formel kann natürlich auch benutzt werden um den Abstand von zwei parallelen Geraden zu berechnen!