Die **Binomialverteilung** gibt die Wahrscheinlichkeit $B_{n,p}(k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$ genau k Erfolge[1] bei n Wiederholungen zu erzielen. Bei n Wiederholungen erwarten wir $\mu = np$ Erfolge, die Standardabweichung ist $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Die Wahrscheinlichkeit bei n Wiederholungen mindestens l aber höchstens m Erfolge (Wahrscheinlichkeit p) zu erzielen ist durch die **kumulierte Binomialverteilung** gegeben:

$$P = \sum_{k=l}^{m} B_{n,p}(k) = \sum_{k=l}^{m} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k} \tag{1}$$

Wir betrachten wieder einen unregelmäßigen Tetraeders, dessen Seitenflächen die Zahlenwerte $1, 2, 3, 4$ zugeordnet sind. Die Wahrscheinlichkeiten für die Werte $1, 2, 3$ liegen jeweils bei $\frac{2}{7}$ und die Wahrscheinlichkeit für die 4 liegt bei $\frac{1}{7}$. Als Erfolg zählt nur eine Vier.

1. **Aufgabe:**
   Der Tetraeder (siehe oben) wird 294 mal geworfen.

   (a) Berechne die Anzahl der zu erwartenden Erfolge und die Standardabweichung.

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$?
   Berechne dazu (mit GTR) die Summe (1) für $l = \mu - \sigma$ und $m = \mu + \sigma$.

   (c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ und $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$?

   (d) Der Tetraeder (siehe oben) wird jetzt 7350 mal geworfen. Löse die Aufgaben (1a), (1b) und (1c) für dieses Experiment.

2. **Aufgabe:**
   Die **Gaußsche Normalverteilung** ist durch die Funktion (Wahrscheinlichkeitsdichte)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \tag{2}$$

   gegeben (Schreibweise $\exp(x) := e^x$).

   (a) Zeichne die Funktion für die Werte aus Aufgabe (1a) und (1d).

   (b) Berechne jeweils die Fläche, welche die durch (2) gegebene Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x)$ im Intervall $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ und $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ mit der $x-$Achse einschließt. Die Integrale lassen sich nur numerisch lösen (GTR benutzen). Was lässt sich über die jeweiligen Ergebnisse aus Binomial- und Normalverteilung sagen?

3. **Aufgabe:**
   Für große n kann die exakte Berechnung der Wahrscheinlichkeit durch die Summe (1) mit sehr großem Rechenaufwand verbunden sein. Es ist dann oft sinnvoll eine Näherung zu verwenden. Wenn die *Laplace Bedingung*

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} > 3$$

   erfüllt ist, kann diese Wahrscheinlichkeit durch die Fläche unter der **Gauß-Kurve** mit $\mu = np$

$$P \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{l}^{m} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \tag{3}$$

   angenähert werden. Durch **Stetigkeitskorrektur** lässt sich diese Näherung verbessern:

$$P \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{l-0,5}^{m+0,5} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \tag{4}$$

   Die Stetigkeitskorrektur wird bei Approximation der Binominalverteilung durch die Normalverteilung verwendet.

   Ein regelmäßiger Tetraeder, dessen Seitenflächen die Zahlenwerte 1; 2; 3; 4 zugeordnet sind wird 1200 mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit eine Vier (Erfolg) zu Würfeln beträgt 25%. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Erfolge im Intervall $[275; 323]$ liegt jeweils durch die Formeln (1), (3) und (4).

[1] Erfolg und Misserfolg mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$