

Sei $n, k \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ die Werte der möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Für die Wahrscheinlichkeiten $P(x_k)$ der Werte x_k gilt:

$$\sum_{k=1}^n P(x_k) = 1 \quad (1)$$

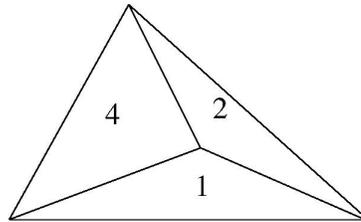
Erwartungswert einer diskreten reellen Zufallsvariablen:

Sei X eine Zufallsvariable, welche die Werte x_1, \dots, x_n annehmen kann. Für den Erwartungswert gilt:

$$E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(x_k) \quad (2)$$

1. Aufgabe:

Berechne den Erwartungswert für das Werfen eines unregelmäßigen Tetraeders, dessen Seitenflächen die Zahlenwerte 1, 2, 3, 4 zugeordnet sind. Die Wahrscheinlichkeiten für die Werte 1, 2, 3 liegen jeweils bei $\frac{2}{7}$ und die Wahrscheinlichkeit für die 4 liegt bei $\frac{1}{7}$.



ERWARTUNGSWERT DER BINOMIALVERTEILUNG:

Bei Bernoulli Prozessen wird ein Zufallsexperiment mit genau zwei möglichen Ergebnissen (z.B. Erfolg mit der Wahrscheinlichkeit p und Misserfolg mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$) mehrfach wiederholt. Die Binomialverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit genau k Erfolge bei n Wiederholungen zu erzielen. Für diese Wahrscheinlichkeit wird oft die Schreibweise $B_{n,p}(k)$ oder auch $B(n; p; k)$ verwendet, wobei

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

ist. Für die folgenden Aufgaben benötigen wir das Binomial Theorem:

Binomial Theorem

Sei $n, k \in \mathbb{N}$ und $x, y \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

2. Aufgabe:

Beweise, dass Gleichung (1) für die Binomialverteilung erfüllt ist. Da es bei der Binomialverteilung auch genau Null Erfolge gibt, startet die Summe hier allerdings bei $k = 0$.

3. Aufgabe:

Beweise, dass die Binomialverteilung den Erwartungswert np besitzt. Hinweis: Für diesen Beweis kann man aus dem Binomial Theorem zunächst eine weitere Formel herleiten, differenziere dazu die Gleichung nach x auf beiden Seiten. Multipliziere danach die Gleichung mit x .

4. Aufgabe:

- Der Tetraeder (siehe oben) wird 350 mal geworfen. Als Erfolg zählt nur eine Vier. Wie viele Erfolge erwartet man im Mittel?
- Wie viele Erfolge würde man bei 1470 Würfeln erwarten, wenn eine Eins und eine Zwei als Erfolg zählt?