Sei KS das Koordinatensystem in dem die Rakete zu einem bestimmten Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $\vec{v}$ besitzt. Angenommen die Rakete bewegt sich vertikal nach oben, also in Richtung $\vec{e}_r$ (Normaleneinheitsvektor der Erdoberfläche), dann ist $\vec{v} = v\,\vec{e}_r$ mit $v = |\vec{v}|$. Der Treibstoff der Rakete soll nun aus vielen Massestücken Δm_A bestehen. Zum Zeitpunkt t sei die Masse der Rakete $m_R + \Delta m_A$. Innerhalb des Zeitraums Δt wird die Treibstoffmasse Δm_A mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ von der Rakete ausgestoßen, die Restmasse der Rakete ist also m_R. Gravitation oder Reibung werden zunächst vernachlässigt. Der Impuls **vor** dem Ausstoß der Masse Δm_A ist nun:

$$\vec{p}_{vor} = (m_R + \Delta m_A)\,\vec{v} \tag{1}$$

Nach dem Ausstoß hat Δm_A im Bezugssystem KS die Geschwindigkeit[1] $\vec{v} + \vec{v}_A$ und den Impuls $\vec{p}_A = \Delta m_A\ (\vec{v} + \vec{v}_A)$. Die Geschwindigkeit der Raketen-Restmasse m_R ändert sich von v auf $\vec{v} + \Delta\vec{v}$, ihr Impuls ist nach dem Ausstoß $\vec{p}_R = m_R\,(\vec{v} + \Delta\vec{v})$. Die Summe der Impulse $\vec{p}_A + \vec{p}_R$ ergibt wieder den Gesamtimpuls **nach** dem Ausstoß:

$$\vec{p}_{nach} = \vec{p}_A + \vec{p}_R = \Delta m_A\ (\vec{v} + \vec{v}_A) + m_R\,(\vec{v} + \Delta\vec{v}) \tag{2}$$

Der Impulserhaltungssatz $\vec{p}_{vor} = \vec{p}_{nach}$ ergibt mit (1) und (2)

$$\begin{aligned} (m_R + \Delta m_A)\,\vec{v} &= \Delta m_A\ (\vec{v} + \vec{v}_A) + m_R\,(\vec{v} + \Delta\vec{v}) \\ \cancel{m_R\vec{v}} + \cancel{\Delta m_A\,\vec{v}} &= \cancel{\Delta m_A\,\vec{v}} + \Delta m_A\,\vec{v}_A + \cancel{m_R\vec{v}} + m_R\,\Delta\vec{v} \end{aligned}$$

also

$$\Delta\vec{v} = -\Delta m_A\,\frac{\vec{v}_A}{m_R} \tag{3}$$

Für die durchschnittliche Beschleunigung der Raketen-Restmasse m im Zeitraum Δt ergibt sich daraus:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m_A}{\Delta t}\cdot\frac{\vec{v}_A}{m_R} \tag{4}$$

Hierbei ist m_R die Raketenrestmasse und Δm_A ein ausgestoßenes Massenelement. Wegen $\Delta m_A > 0$ und $\Delta t > 0$ gilt also auch $\frac{\Delta m_A}{\Delta t} > 0$. Da die Raketenmasse abnimmt, muss die Änderung der Raketenmasse negativ sein, aber den gleichen Betrag haben. Offenbar ist

$$\frac{\Delta m_R}{\Delta t} = -\frac{\Delta m_A}{\Delta t}. \tag{5}$$

Die Ausstoßgeschwindigkeit $\vec{v}_A$ ist der Bewegungsrichtung der Rakete $\vec{v}$ entgegengerichtet. Damit erhält man

$$\vec{v}_A = -v_A\vec{e}_r \tag{6}$$

mit $v_A = |\vec{v}_A|$. Aus (4) zusammen mit (5) und (6) ergibt sich dann:

$$\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m_A}{\Delta t}\cdot\frac{\vec{v}_A}{m_R} = -\frac{\Delta m_R}{\Delta t}\cdot\frac{v_A}{m_R}\vec{e}_r$$

Der Übergang $\Delta t \to 0$ liefert die durch Schub entstehende Momentanbeschleunigung

$$\vec{a}_I = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dm_R}{dt}\cdot\frac{v_A}{m_R}\vec{e}_r$$

welche ebenfalls in Richtung $\vec{e}_r$ gerichtet ist[2]. In der Erdathmosphäre wird die Rakete zusätzlich durch Erdanziehungskraft $\vec{F}_G$ und Lufwiderstand $\vec{F}_w$ gebremst. Die entsprechenden Beschleunigungen

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m} = -G\frac{M_{Erde}}{r^2}\vec{e}_r \approx -g\vec{e}_r \qquad \text{und} \qquad \vec{a}_w = \frac{\vec{F}_w}{m} = -\frac{1}{m}\cdot\underbrace{\frac{\rho_{Luft}c_w A_{Quer}}{2}}_{:=\beta_w}\cdot v^2\vec{e}_r$$

wirken in Richtung $-\vec{e}_r$. Die Gesamtbeschleunigung der Rakete erhält man als Summe der Einzelbeschleunigungen:

$$\vec{a} = \vec{a}_I + \vec{g} + \vec{a}_w = \left(-\frac{dm_R}{dt}\cdot\frac{v_A}{m_R} - g - \frac{\beta_w}{m}v^2\right)\vec{e}_r$$

[1] $\vec{v}$ und $\vec{v}_A$ haben entgegengesetzte Richtungen, diese Information ist aber in den Vektoren selber enthalten.

[2] Ohne weitere Kräfte gilt offenbar $0 = \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_r + \frac{dm_R}{dt}\cdot\frac{v_A}{m_R}\vec{e}_r = \left(\frac{dv}{dt}\,m_R + \frac{dm_R}{dt}v_A\right)\frac{\vec{e}_r}{m_R}$ also $\frac{dv}{dt}\,m_R + \frac{dm_R}{dt}v_A = 0$.