Räumlich flache Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^3(t)\left\{dx^2 + dy^2 + dz^2\right\}$$

Einsteintensor $G^i_k = R^i_k - \frac{1}{2}R\delta^i_k + \Lambda\delta^i_k$ ergibt

$$G^t_t = -\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \Lambda \tag{1}$$

$$G^x_x = G^y_y = G^z_z = -\frac{1}{c^2}\left[2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2\right] + \Lambda \tag{2}$$

und $G^i_k = 0$ wenn $i \neq k$.

Sei ρ_1 die heutige Dichte des Universums. Die Masse, angenommen als Kugel, ist also $m = \rho_1 V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1$. Expandiert nun das Universum mit einem Skalenfaktor $a(t)$, welcher heute den Wert Eins hat, so nimmt das Volumen durch

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi R^3 a^3(t)$$

zu. Für die Dichte $\rho(t)$ gilt dann:

$$\rho(t) = \frac{m}{V(t)} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1}{\frac{4}{3}\pi R^3 a^3(t)} = \frac{\rho_1}{a^3(t)} \tag{3}$$

Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit (Universum auf großen Skalen näherungsweise isotrop und homogen) ist gegeben durch

$$\left(T^i_k\right) = \begin{pmatrix} -c^2\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

Mit Einstein's Feldgleichungen $G^i_k = \frac{8\pi\gamma}{c^4}T^i_k$ erhält man aus (1):

$$-\frac{3}{c^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \Lambda = \frac{8\pi\gamma}{c^4}\left(-c^2\rho\right) = -\frac{8\pi\gamma}{c^2}\cdot\frac{\rho_1}{a^3}$$

und damit

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi\gamma\rho_1}{3a^3} + \frac{c^2\Lambda}{3}. \tag{4}$$

Einsetzen der Parameter $\Omega_M = \frac{8\pi\gamma\rho_1}{3H_0^2}$ und $\Omega_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}$ in Gleichung (4)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \cdot \underbrace{\frac{8\pi\gamma\rho_1}{3H_0^2}}_{\Omega_M}\cdot\frac{1}{a^3} + H_0^2\cdot\underbrace{\frac{c^2\Lambda}{3H_0^2}}_{\Omega_\Lambda} \tag{5}$$

ergibt also

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2\left(\frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda\right) \tag{6}$$

Aufgabe:

1. Löse die Differentialgleichung (5) zunächst für ein Universum ohne kosmologische Konstante ($\Omega_\Lambda = 0$).
2. Löse die Differentialgleichung (5) für ein Universum mit kosmologischer Konstante.
3. Laut NASA Explorer mission WMAP sind die Daten $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ sowie $\Omega_M \approx 0,3$ und $H_0 \approx 0.07\frac{1}{Gyr}$. Zeichne jeweils die Lösungsfunktionen $a(t)$ im Bereich $0 \leq t \leq 25Gyr = 25\cdot 10^9$ Jahre.
4. Was folgt jeweils für den Druck p aus den Feldgleichungen für die Komponenten (2) des Einsteintensors?