Eine Welle, die sich mit der Geschwindigkeit $c = \lambda f$ ausbreitet, wird durch eine Lösung $u(t, \vec{r})$ der Wellengleichung $\frac{1}{c^2}\ddot{u} - \Delta u = 0$ beschrieben. Dabei ist Δu die Summe der zweiten Ableitungen der Funktion u nach den Ortskoordinaten $\vec{r} = (x \mid y \mid z)$. Die dreidimensionale Wellengleichung ist eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Eindimensionale Wellen

Im folgenden betrachten wir Wellen, die nur von einer Ortskoordinate x und natürlich von der Zeit t abhängen. In diesem Fall reduziert sich Gleichung (1) auf die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\ddot{u} - u'' = 0 \tag{2}$$

Eine eindimensionale Welle lässt sich z.B. durch die Funktion

$$u(x,t) = \widehat{u} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}ct - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \tag{3}$$

beschreiben. Dabei ist λ die Wellenlänge, c die Ausbreitungsgeschwindigkeit und $\widehat{u}$ die Amplitude der Welle. Mit der Wellenzahl Wellenzahl[1] $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ lässt sich (3) als $u(x,t) = \widehat{u}\sin(kct - kx)$ schreiben.

1. **Aufgabe:**

   (a) Zeichne eine durch (3) beschriebene eindimensionale Welle mit der Wellenlänge $4cm$, der Amplitude $3cm$ und der Ausbreitungsgeschwindigkeit $0,5\frac{cm}{s}$ zu den Zeitpunkten $t = 2s$ und $t = 5s$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

   (b) Beweise, dass (3) eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung (2) ist[2].

   (c) Entscheide begründet ob auch $u(x,t) = \widehat{u}\cos(kct - kx)$ eine Lösung ist.

   (d) Zeige, dass $kc = \omega$ und deshalb (3) auch in der Form $u(x,t) = \widehat{u}\sin(\omega t - kx)$ geschrieben werden kann. Welche physikalische Einheit hat k?

2. **Aufgabe:**

   Die Schwingungsdauer einer Welle mit der Wellenlänge $1\,m$ beträgt $2\,s$. Die Amplitude der Welle ist $30\,cm$.

   (a) Ermittle die Funktionsgleichung basierend auf (3). Gib die Wellenzahl k an.

   (b) Ermittle wo sich zum Zeitpunkt $t = 0$ Wellenberge befinden.

   (c) Bestimme wann sich an der Stelle $x = 0$ zum ersten mal ein Wellenberg befindet.

[1] Bei der dreidimensionalen Welle ist die Wellenzahl $k = \left|\vec{k}\right|$ der Betrag Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$.

[2] Hinweis: Sei $a \in \mathbb{R}$ dann ist $\frac{d}{dx}[\sin(ax)] = a\cos(ax)$ und $\frac{d}{dx}[\cos(ax)] = -a\sin(ax)$