Potentialbarriere der Breite b und Höhe V_0, also

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ V_0 & \text{für } 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{für } x > b \end{cases}$$

Schrödingergleichung:

$$\Psi''(x) + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E - V(x)\right)\Psi(x) = 0$$

Wir betrachten den Fall $E < V_0$. Das Teilchen hat klassisch zu wenig Energie um über die Barriere zu kommen!

Grundlegende Skizze der Vorgehensweise:

Bereich 1: $x < 0$ hier ist $V = 0$. Die Gleichung hat die Form $\Psi'' + k^2\Psi = 0$ mit $k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}E}$

Lösungen sind Linearkombinationen von $\sin(kx)$, $\cos(kx)$ oder $e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i\sin(kx)$ mit $i = \sqrt{-1}$.

Üblicherweise wählt man hier $\psi_1 = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx}$. (Teilchen von links: $B_1 \rightarrow$ Reflexion an der Barriere)

Bereich 2: $0 \leq x \leq b$ hier ist $V = V_0$ und damit $\Psi'' + \underbrace{\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - V_0)}_{<0}\Psi = 0$.

Sei $l = \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2}(V_0 - E)}$, dann hat die DGL die Form $\Psi'' - l^2\psi = 0$.

Lösungen sind Linearkombinationen von e^{lx} und e^{-lx} oder auch $\sinh(lx)$, $\cosh(lx)$

Lösungsansatz zum Beispiel $\psi_2 = A_2 e^{lx} + B_2 e^{-lx}$

Bereich 3: $x > b$ hier ist wieder $V = 0$, siehe Bereich 1

Lösungsansatz analog $\psi_3 = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx}$ (Teilchen von links: $B_3 = 0$)

Reflexion und Transmission zusammen ergeben komplette Wahrscheinlichkeitsstromdichte: $|B_1|^2 + |A_3|^2 = 1$

Stetigkeit und Differenzierbarkeit an beiden Rändern der Barriere:

$\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$ und $\psi_I'(0) = \psi_{II}'(0)$

$\psi_{II}(b) = \psi_{III}(b)$ und $\psi_{II}'(b) = \psi_{III}'(b)$

Wahrscheinlichkeit für das Durchtunneln der Barriere: $P_T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}$.

Transmissionswahrscheinlichkeit:

$$P_T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)}\sinh^2\left(\frac{2\pi\sqrt{2m(V_0 - E)}}{h}b\right)}$$