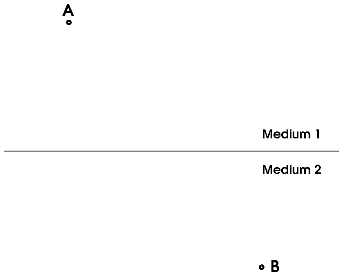
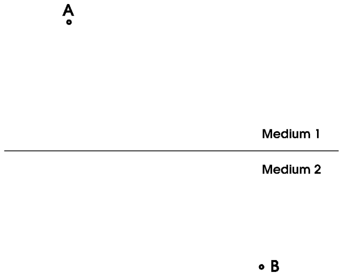
Das Snelliussche Brechungsgesetz

Licht läuft von Punkt A zu Punkt B:

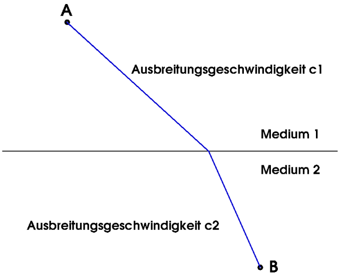


Licht läuft von Punkt A zu Punkt B:



Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Gerade !

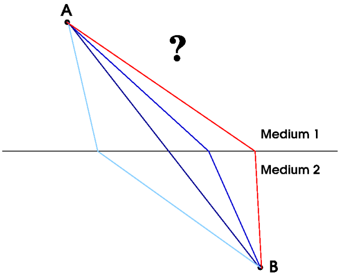
Licht läuft von Punkt A zu Punkt B:



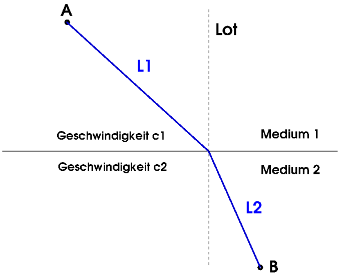
Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine Gerade !

Licht wählt den schnellsten Weg !

Welches ist der schnellste Weg ?

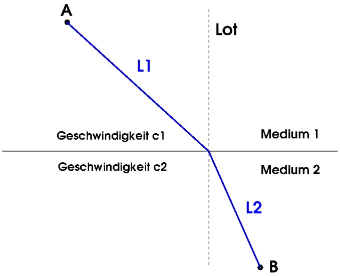


Betrachten wir einen Weg genauer:



Licht legt die Strecke L_j in Medium j zurück

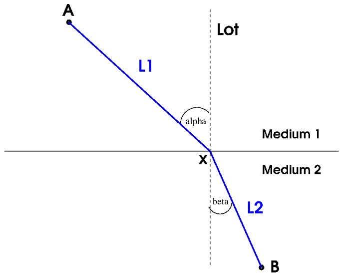
Betrachten wir einen Weg genauer:



Licht legt die Strecke L_j in Medium j zurück

Gesamtzeit $t = \dfrac{L_1}{c_1} + \dfrac{L_2}{c_2}$ minimal !

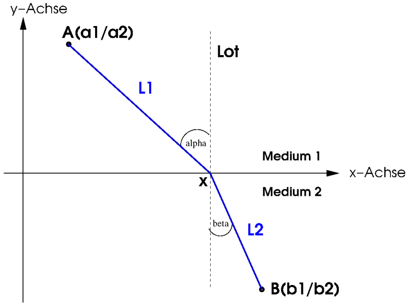
Einfallswinkel α und Ausfallswinkel β (zum Lot gemessen)



Licht legt die Strecke L_j in Medium j zurück

Gesamtzeit $t = \dfrac{L_1}{c_1} + \dfrac{L_2}{c_2}$ minimal !

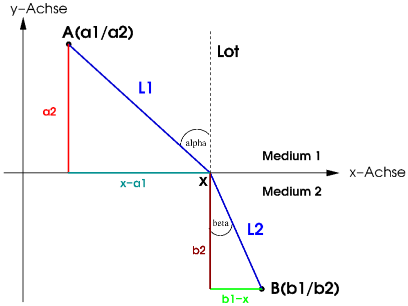
In einem Koordinatensystem:



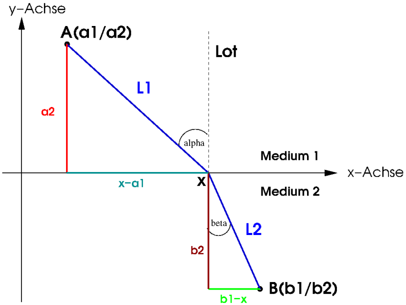
Licht trifft auf das Medium an der Stelle x

Gesamtzeit $t = \dfrac{L_1}{c_1} + \dfrac{L_2}{c_2}$ minimal !

Wie lang sind die Strecken L_1 und L_2 ?



Wie lang sind die Strecken L_1 und L_2 ?



Pythagoras:

$$L_1 = \sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2} \quad \text{und} \quad L_2 = \sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}$$

Gesucht ist die kleinste Laufzeit $t = \frac{L_1}{c_1} + \frac{L_2}{c_2}$,

also ein **Minimum** der Funktion:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}}{c_2}$$

Gesucht ist die kleinste Laufzeit $t = \frac{L_1}{c_1} + \frac{L_2}{c_2}$,

also ein **Minimum** der Funktion:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}}{c_2}$$

Ableiten ergibt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 \sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}} - \frac{b_1 - x}{c_2 \sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}}$$

Gesucht ist die kleinste Laufzeit $t = \frac{L_1}{c_1} + \frac{L_2}{c_2}$,

also ein **Minimum** der Funktion:

$$t(x) = \frac{\sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}}{c_2}$$

Ableiten ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{x - a_1}{c_1 \sqrt{a_2^2 + (x - a_1)^2}} - \frac{b_1 - x}{c_2 \sqrt{b_2^2 + (b_1 - x)^2}} \\ &= \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2} \end{aligned}$$

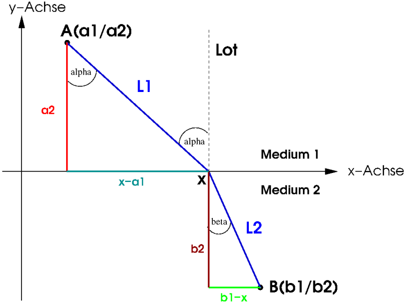
Gleichung: $$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$

Optische Brechung

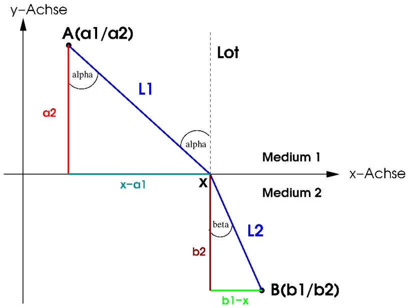
Gleichung: $$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$

Experiment: $$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \text{Konstant}$$

Gleichung: $$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$



Gleichung: $$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$



$$\sin\alpha = \frac{x - a_1}{L_1} \quad \text{und} \quad \sin\beta = \frac{b_1 - x}{L_2}$$

Einsetzen ergibt

$$0 = \frac{dt}{dx} \quad = \quad \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2}$$

Einsetzen ergibt

$$0 = \frac{dt}{dx} \quad = \quad \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} - \frac{\sin \beta}{c_2}$$

und damit:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Einsetzen ergibt

$$0 = \frac{dt}{dx} = \frac{x - a_1}{c_1 L_1} - \frac{b_1 - x}{c_2 L_2}$$

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} - \frac{\sin\beta}{c_2}$$

und damit:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2}$$

Nach Definition des Brechungsindex ist $c_k = c/n_k$, also folgt:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}$$

HB:

$$L_1 = \sqrt{a_2^2 + (x-a_1)^2}$$

$$\frac{dL_1}{dx} = \frac{\cancel{2}(x-a_1)}{\cancel{2}\sqrt{a_2^2+(x-a_1)^2}} = \frac{x-a_1}{L_1}$$

$$\frac{1}{c_1}\frac{d}{dx}\left(\frac{x-a_1}{L_1}\right) = \frac{1}{c_1}\left(\frac{L_1 - (x-a_1)\cdot\frac{dL_1}{dx}}{L_1^2}\right) = \frac{1}{c_1}\left(\frac{L_1 - \frac{(x-a_1)^2}{L_1}}{L_1^2}\right)$$

$$= \frac{1}{c_1}\left(\frac{L_1^2-(x-a_1)^2}{L_1^3}\right) = \frac{1}{c_1}\left(\frac{a_2^2}{L_1^3}\right) = \frac{a_2^2}{c_1 L_1^3}$$

$$\frac{1}{c_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x-b_1}{L_2}\right) = \frac{b_2^2}{c_2 L_2^3}$$ siehe oben

$$t'' = \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{a_2^2}{c_1 L_1^3} + \frac{b_2^2}{c_2 L_2^3} > 0$$ $\rightarrow$ Min wenn:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_2}{c_1}$$