Spezielle Relativitätstheorie

Dr. Günther

December 21, 2016

1 Lorentz-transformation

Die Metrik der SRT (**S**peziellen **R**elativitäts-**T**heorie) ist die Minkowski-Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{1}$$

In einem Intertialsystem K gleichzeitig stattfindende Ereignisse sind in einem relativ dazu bewegten Inertialsystem $\widetilde{K}$ nicht gleichzeitig. Längenkontraktion und Zeitdilatation haben zur Folge, dass räumliche (dreidimensionale) Abstände in K und $\widetilde{K}$ unterschiedlich gemessen werden. Allerdings soll der **vierdimensionale Raumzeitabstand** zwischen zwei Ereignissen in allen Inertialsystemen gleich sein, also $ds^2 = d\widetilde{s}^2$. Lorentz-Transformationen sind also Koordinatentransformationen, welche die Metrik ds^2 unverändert lassen. Sei nun $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$ und $x_3 = z$, dann ist die Transformationen $x_k = f_k\left(\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\right)$ eine Lorentztransformation, wenn:

$$ds^2 = \sum_{k=0}^{4} \left[df_k\left(\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\right)\right]^2 = c^2 d\tau^2 - d\xi^2 - d\widetilde{y}^2 - d\widetilde{z}^2 \tag{2}$$

Bei einer geradlinigen Relativbewegung zweier Inertialsysteme zueinander lässt sich das Koordinatensystem so wählen, dass die Relativbewegung parallel zur $x-$Achse stattfindet. Die übrigen Raumkoordinaten y und z bleiben dabei gleich. Die entsprechende Transformation reduziert sich dann auf:

$$ct = f_0\left(\tau, \xi\right) := a\left(\tau, \xi\right), \quad x = f_1\left(\tau, \xi\right) := b\left(\tau, \xi\right), \quad y = \widetilde{y}, \quad z = \widetilde{z} \tag{3}$$

Die Transformation (3) hat die Struktur von Parallelverschiebungen (oder Drehungen) in der $t, x-$Ebene. Anstatt der $x-$Koordinate könnte man natürlich genauso die $y-$ oder $z-$Koordinate durch eine solche Funtion ersetzten. Im folgenden sei $\dot{f} := \frac{\partial f}{\partial \tau}$ und $f' := \frac{\partial f}{\partial \xi}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} c^2 dt^2 &= \left(\frac{\partial a}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial a}{\partial \xi} d\xi\right)^2 = \dot{a}^2 d\tau^2 + 2\dot{a}a'\, d\tau\, d\xi + a'^2 d\xi^2 \\ dx^2 &= \left(\frac{\partial b}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial b}{\partial \xi} d\xi\right)^2 = \dot{b}^2 d\tau^2 + 2\dot{b}b'\, d\tau\, d\xi + b'^2 d\xi^2 \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \overset{(3)}{=} \left[da\left(\tau, \xi\right)\right]^2 - \left[db\left(\tau, \xi\right)\right]^2 - d\widetilde{y}^2 - d\widetilde{z}^2 \\ &= \dot{a}^2 d\tau^2 + 2\dot{a}a'\, d\tau\, d\xi + a'^2 d\xi^2 - \left(\dot{b}^2 d\tau^2 + 2\dot{b}b'\, d\tau\, d\xi + b'^2 d\xi^2\right) - d\widetilde{y}^2 - d\widetilde{z}^2 \\ &= \left(\dot{a}^2 - \dot{b}^2\right) d\tau^2 + 2\left(\dot{a}a' - \dot{b}b'\right) d\tau\, d\xi + \left(a'^2 - b'^2\right) d\xi^2 - d\widetilde{y}^2 - d\widetilde{z}^2 \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der Metrik (2) ergibt dann drei Differentialgleichungen für die Lorentztransformation:

$$(L1) \quad \dot{a}^2 - \dot{b}^2 = c^2 \qquad (L2) \quad a'^2 - b'^2 = -1 \qquad (L3) \quad \dot{a}a' = \dot{b}b'$$

Zur Lösung dieser Gleichungen lässt sich die Identität

$$\cosh^2\left(\psi\right) - \sinh^2\left(\psi\right) = 1 \tag{4}$$

benutzen. Multipliziert man (4) mit c^2 so ergibt sich $c^2 \cosh^2\left(\psi\right) - c^2 \sinh^2\left(\psi\right) = c^2$. Gleichung (L1) wird offensichtlich gelöst durch $\dot{a} = c \cdot \cosh\left(\psi\right)$ und $\dot{b} = c \cdot \sinh\left(\psi\right)$. Auch (L2) lässt sich mit Hilfe von (4) lösen. Man erhält leicht die

Identität $\sinh^2(\phi) - \cosh^2(\phi) = -1$. Gleichung (L2) wird offensichtlich gelöst von $a' = \sinh(\phi)$ und $b' = \cosh(\phi)$. Zusätzlich müssen die Funktionen aber auch Gleichung (L3) erfüllen. Mit

$$\begin{aligned}\dot{a}a' &= c \cdot \cosh(\psi) \cdot \sinh(\phi) = c \cdot \cosh(\psi)\sinh(\phi) \\ \dot{b}b' &= \cosh(\phi) \cdot c \cdot \sinh(\psi) = c \cdot \cosh(\phi)\sinh(\psi)\end{aligned}$$

folgt aus (L3) direkt $\phi = \psi$. Integriert man nun die Differentialgleichungen

$$\dot{a} = c \cdot \cosh(\psi), \quad a' = \sinh(\psi) \quad \text{und} \quad \dot{b} = c \cdot \sinh(\psi), \quad b' = \cosh(\psi)$$

so ergibt sich als Lösung aller drei Gleichungen (L1), (L2) und (L3)

$$a(\tau, \xi) = c\tau \cosh(\psi) + \xi \sinh(\psi), \qquad b(\tau, \xi) = c\tau \sinh(\psi) + \xi \cosh(\psi)$$

also

$$ct = c\tau \cosh(\psi) + \xi \sinh(\psi), \qquad x = c\tau \sinh(\psi) + \xi \cosh(\psi) \tag{5}$$

1.1 Lorentz-transformation und Relativgeschwindigkeit

Die beiden Inertialsysteme bewegen sich mit einer Geschwindigkeit V relativ zueinander. Die Relativgeschwindigkeit V soll nun in die Formel für die Lorentztransformation gebracht werden. Für einen im $\{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$ −Koordinatensystem $\widetilde{K}$ ruhenden Punkt gilt offenbar $\xi = konst.$ und damit $d\xi = 0$. Aus (5) erhält man dann:

$$\frac{dt}{d\tau} = \cosh(\psi), \quad \frac{dx}{d\tau} = c\sinh(\psi)$$

Aus dem $\{t, x, y, z\}$ −Koordinatensystem K betrachtet hat der in $\widetilde{K}$ ruhende Punkt die Geschwindigkeit

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{dx}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{c \cdot \sinh(\psi)}{\cosh(\psi)} = c \cdot \tanh(\psi) \tag{6}$$

also:

$$\tanh(\psi) = \frac{V}{c} \tag{7}$$

In der Lorentz-Transformation (5) treten die Terme $\sinh(\psi)$ und $\cosh(\psi)$ auf. Allerdings lässt sich der Term $\tanh(\psi)$ umschreiben. Mit (4) folgt:

$$\tanh(\psi) = \frac{\sinh(\psi)}{\cosh(\psi)} = \frac{\sinh(\psi)}{\sqrt{1 + \sinh^2(\psi)}}$$

und damit

$$\begin{aligned}\sinh(\psi) &= \tanh(\psi)\sqrt{1 + \sinh^2(\psi)} \\ \sinh^2(\psi) &= \tanh^2(\psi)\left(1 + \sinh^2(\psi)\right) = \tanh^2(\psi) + \tanh^2(\psi)\sinh^2(\psi) \\ \sinh^2(\psi) - \tanh^2(\psi)\sinh^2(\psi) &= \tanh^2(\psi) \\ \sinh^2(\psi)\left(1 - \tanh^2(\psi)\right) &= \tanh^2(\psi) \\ \sinh^2(\psi) &= \frac{\tanh^2(\psi)}{\left(1 - \tanh^2(\psi)\right)}\end{aligned}$$

Zusammen mit (7) erhält man:

$$\sinh(\psi) = \frac{\tanh(\psi)}{\sqrt{1 - \tanh^2(\psi)}} = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Analog ergibt sich aus

$$\tanh(\psi) = \frac{\sinh(\psi)}{\cosh(\psi)} = \frac{\sqrt{\cosh^2(\psi) - 1}}{\cosh(\psi)}$$

für den $\cosh(\psi)$:

$$\begin{aligned}
\cosh(\psi)\tanh(\psi) &= \sqrt{\cosh^2(\psi)-1} \\
\cosh^2(\psi)\tanh^2(\psi) &= \cosh^2(\psi)-1 \\
1 &= \cosh^2(\psi)-\cosh^2(\psi)\tanh^2(\psi) \;=\; \cosh^2(\psi)\left(1-\tanh^2(\psi)\right) \\
\cosh^2(\psi) &= \frac{1}{1-\tanh^2(\psi)}
\end{aligned}$$

Zusammen mit (7) erhält man:

$$\cosh(\psi) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(\psi)}} \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Die Lorentz-Transformation (5) wird damit zu

$$\begin{aligned}
t &= \tau\cosh(\psi)+\frac{\xi}{c}\sinh(\psi) \;=\; \tau\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+\frac{\xi}{c}\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\tau+\xi\cdot\frac{V}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
x &= c\tau\sinh(\psi)+\xi\cosh(\psi) \;=\; c\tau\frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+\xi\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\tau V+\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}$$

also insgesamt:

$$t=\frac{\tau+\frac{V}{c^2}\cdot\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad x=\frac{\tau V+\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad y=\widetilde{y}\,, \quad z=\widetilde{z} \tag{8}$$

1.2 Rücktransformation

Die Rücktransformation der Lorentztransformation (8) erhält man durch auflösen der Gleichungen nach den Koordinaten τ und ξ. Es ist

$$x-Vt \;=\; \frac{\tau V+\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-V\cdot\frac{\tau+\frac{V}{c^2}\cdot\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\xi-\frac{V^2}{c^2}\cdot\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \xi\cdot\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \xi\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{9}$$

und

$$t-\frac{V}{c^2}x \;=\; \frac{\tau+\frac{V}{c^2}\cdot\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-\frac{V}{c^2}\cdot\frac{\tau V+\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\tau-\frac{V^2}{c^2}\cdot\tau}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \tau\cdot\frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \tau\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{10}$$

Aus (9) und (10) ergibt sich für die Rücktransformation also

$$\tau=\frac{t-\frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad \xi=\frac{x-Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad \widetilde{y}=y\,, \quad \widetilde{z}=z \tag{11}$$

Mit den Transformationen (8) und (11) kann man nun die gemessenen Längen oder Zeiten in den verschiedenen Inertialsystemen vergleichen.

2 Raumzeitabstand

Analog zum dreidimensionalen Skalarprodukt $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle_{\mathbb{R}^3}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ zweier Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ lässt sich die Metrik (1) der Minkowski-Raumzeit $\mathbb{M}^4$ für zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{M}^4$ mit $\vec{a}=(a_t,a_x,a_y,a_z)^\top$ und $\vec{b}=(b_t,b_x,b_y,b_z)^\top$ schreiben als:

$$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle_{\mathbb{M}^4}=c^2a_tb_t-a_xb_x-a_yb_y-a_zb_z \tag{12}$$

Damit ist die vierdimensionale Länge eines Vektors $\vec{a}\in\mathbb{M}^4$ gegeben durch

$$|\vec{a}|_{\mathbb{M}^4}=\sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle_{\mathbb{M}^4}}=\sqrt{c^2a_t^2-a_x^2-a_y^2-a_z^2} \tag{13}$$

2.1 Raumzeitabstand zwischen Ereignissen

Angenommen wir haben zwei Ereignisse P und Q mit den Koordinaten $P(t_1, x_1, y_1, z_1)$ und $Q(t_2, x_2, y_2, z_2)$. Der vierdimensionale Raumzeitabstand von P und Q ist die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$. Definiert man nun $\Delta t = t_2 - t_1$ usw., dann ist:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0Q} - \overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} t_2 - t_1 \\ x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Nach Gleichung (13) ist die Länge von $\overrightarrow{PQ}$ und damit der Raumzeitabstand von P und Q gegeben durch

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|_{\mathbb{M}^4} = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$$

bzw. das Quadrat des Raumzeitabstands durch:

$$\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle_{\mathbb{M}^4} = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 \tag{14}$$

Von einem relativ mit der Geschwindigkeit V bewegten Bezugssytem aus betrachtet, haben die Ereignisse P und Q die Koordinaten $\mathcal{P}(\tau_1, \xi_1, \widetilde{y}_1, \widetilde{z}_1)$ und $\mathcal{Q}(\tau_2, \xi_2, \widetilde{y}_2, \widetilde{z}_2)$ welche durch (11) mit den Koordinaten $\{t, x, y, z\}$ zusammenhängen. Es ist also

$$\mathcal{P}\left(\frac{t_1 - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ y_1\ ,\ z_1\right) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{Q}\left(\frac{t_2 - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\ ,\ y_2\ ,\ z_2\right).$$

Für den Vektor $\overrightarrow{\mathcal{PQ}}$ ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{\mathcal{PQ}} = \begin{pmatrix} \tau_2 - \tau_1 \\ \xi_2 - \xi_1 \\ \widetilde{y}_2 - \widetilde{y}_1 \\ \widetilde{z}_2 - \widetilde{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_2 - \frac{V}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{V}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \frac{x_2 - Vt_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t_2 - t_1 - \frac{V}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \frac{x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \frac{\Delta x - V\Delta t}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Beweise mit der in Abschnitt 2.1 gegebenen Schreibweise, dass der Raumzeitabstand in allen Intertialsystemen gleich ist. Zu zeigen ist:

$$\left\langle \overrightarrow{\mathcal{PQ}}, \overrightarrow{\mathcal{PQ}} \right\rangle_{\mathbb{M}^4} = \left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \right\rangle_{\mathbb{M}^4}$$

3 Längenkontraktion

Wir betrachten einen Maßstab, welcher eine gewisse Ruhrlänge l_0 hat. Im Folgenden soll die aus einem relativ zum Maßstab bewegten Sytem gemessene Länge l bestimmt werden. Man kann sowohl K als auch $\widetilde{K}$ als Ruhesystem des Maßstabs annehmen. Beide Varianten sollen hier betrachtet werden:

3.1 *Variante "Der Maßstab ruht in $\widetilde{K}$"*

Betrachten wir einen Maßstab, der im System $\widetilde{K}$ ruht. Seine Ruhelänge ist hier gegeben durch $\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1$. Das System $\widetilde{K}$ bewegt sich aber mit der Geschwindigkeit V relativ zum System K. Aus dem System K betrachtet hat der Maßstab die Länge $\Delta x = x_2 - x_1$ wobei mit (11) gilt:

$$\Delta\xi \;=\; \xi_2 - \xi_1 \;=\; \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Die Länge $\Delta\xi$ des Maßstabs in seinem Ruhesystem $\widetilde{K}$ wird **Eigenlänge** oder Ruhelänge genannt und oft mit l_0 bezeichnet. Die dem Stab aus K zugeordnete Länge Δx wird nun mit l bezeichnet, es ist dann:

$$\Delta x = \Delta\xi \cdot \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \quad \text{also} \quad l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

3.2 Variante "*Der Maßstab ruht in K*"

Betrachten wir einen Maßstab, der im System K ruht, und dessen Länge in seinem Ruhesystem K durch $\Delta x = x_2 - x_1$ gegeben ist. Das System $\widetilde{K}$ mit den Koordinaten $\{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$ bewegt sich mit der Relativgeschwindigkeit V entlang der $x-$Achse des Systems K mit den Koordinaten $\{t, x, y, z\}$. Mit der Lorentztransformation (8) ergibt sich

$$\Delta x \;=\; x_2 - x_1 \;=\; \frac{\tau V + \xi_2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\tau V + \xi_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \;=\; \frac{\Delta\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

und damit

$$\Delta\xi = \Delta x \cdot \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Jetzt ist aber Δx die Länge des Maßstabs in seinem Ruhesystem K und wird als **Eigenlänge** mit l_0 bezeichnet. Die dem Stab aus dem bewegten System $\widetilde{K}$ zugeordnete Länge $\Delta\xi$ wird nun mit l bezeichnet und es ergibt sich wieder:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

4 Zeitdilatation und Eigenzeit

Wir betrachten eine sich beliebig bewegende Uhr. Für einen infinitesimal kleinen Zeitmoment dt lässt sich die Bewegung als **geradlinig-gleichförmig** auffassen. Nehmen wir an, dass die Uhr im System $\widetilde{K}$ ruht. Das ganze System $\widetilde{K}$ bewege sich wieder mit der Geschwindigkeit V entlang der $x-$Achse des Systems K ($x-$Achse und $\xi-$Achse liegen aufeinander). Auch hier gibt es verschiedene Möglichkeiten die Formel für die Zeitdilatation herzuleiten.

4.1 *Erste Variante*

Im Ruhesystem der Uhr $\widetilde{K}$ ändern sich die Koordinaten $\{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$ der Uhr nicht mit der Zeit τ. Für einen in K

ruhenden Beobachter bewegt sich die Uhr also mit der Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = V$ in $x-$Richtung. Aus (11) ergibt sich damit für $\frac{d\tau}{dt}$ die Gleichung:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right] = \frac{1 - \frac{V}{c^2}\cdot\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1-\frac{V^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \tag{15}$$

Hieraus folgt die Integralgleichung

$$\int d\tau = \int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{16}$$

und da der Wurzelterm konstant ist lässt sich diese Gleichung leicht integrieren:

$$\tau = t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

t ist dabei die Zeit, welche im System K vergeht. Die Eigenzeit τ ist die Zeit, welche im relativ zu K bewegten System $\widetilde{K}$ (das Ruhesystem der Uhr) vergeht.

4.2 *Zweite Variante:*

Die Koordinaten des Systems K (in dem der Beobachters ruht) sind $\{t, x, y, z\}$, und die Koordinaten des sich mit der Uhr mitbewegenden Inertialsystems $\widetilde{K}$ sind $\{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$. Im Ruhesystem der Uhr $\widetilde{K}$ ändern sich die Koordinaten $\{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$ der Uhr nicht mit der Zeit τ. Es ist daher

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{d\widetilde{y}}{d\tau} = \frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = 0. \tag{17}$$

Aus (8) folgt für das Differential dt

$$dt = \frac{d\tau + \frac{V}{c^2}\cdot d\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

und damit

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\frac{d\tau}{d\tau} + \frac{V}{c^2}\cdot\frac{d\xi}{d\tau}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \overset{(17)}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \text{also} \quad \frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Hieraus folgt wieder die Integralgleichung (16).

4.3 *Dritte Variante:*

Gemessen im Inertialsystem K lege die Uhr im Zeitintervall dt die Strecke $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ zurück. Im Inertialsystem $\widetilde{K}$ ruht die Uhr, also ist $d\xi = d\widetilde{y} = d\widetilde{z} = 0$. Es ergibt sich damit in K und $\widetilde{K}$:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) = c^2dt^2 - dl^2 \\ d\widetilde{s}^2 &= c^2d\tau^2 - \underbrace{\left(d\xi^2 + d\widetilde{y}^2 + d\widetilde{z}^2\right)}_{=0} = c^2d\tau^2 \end{aligned}$$

Wegen der Invarianz $ds^2 = d\widetilde{s}^2$ ist $c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dl^2$. Division durch c^2dt^2 ergibt $\dfrac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \dfrac{dl^2}{c^2dt^2}$ also

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-\frac{dl^2}{c^2dt^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{dl}{dt}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

und wieder folgt die Integralgleichung (16).

5 Transformation der Geschwindigkeit

Das System $\widetilde{K}$ mit den Koordinaten $\{\tau, \xi, \widetilde{y}, \widetilde{z}\}$ bewege sich wieder mit der Relativgeschwindigkeit V entlang der $x-$Achse des Systems K mit den Koordinaten $\{t, x, y, z\}$. Hier liegt die $\xi-$Achse des Systems $\widetilde{K}$ auf der $x-$Achse des Systems K, d.h. die $\xi-$Richtung stimmt mit der $x-$Richtung überein. Die einem Objekt im System $\widetilde{K}$ zugeordnete Geschwindigkeitskomponente in $\xi-$Richtung bzw. in $x-$Richtung soll nun mit $\widetilde{v}_x := \frac{d\xi}{d\tau}$ bezeichnet werden. Analog lassen sich auch die übrigen Geschwindigkeitskomponenten in $\widetilde{K}$ definieren. Damit haben wir

$$\widetilde{v}_x := \frac{d\xi}{d\tau}\,, \quad \widetilde{v}_y := \frac{d\widetilde{y}}{d\tau}\,, \quad \widetilde{v}_z := \frac{d\widetilde{z}}{d\tau}\,. \tag{18}$$

Aus den Gleichungen (8) für die Lorentztransformation folgt für die Differentiale

$$dt = \frac{d\tau + \frac{V}{c^2}d\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad dx = \frac{V\,d\tau + d\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad dy = d\widetilde{y}\,, \quad dz = d\widetilde{z}$$

und damit für die entsprechnenden Quotienten:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{V\,d\tau+d\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)}{\left(\frac{d\tau+\frac{V}{c^2}d\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)} = \frac{V\,d\tau + d\xi}{d\tau + \frac{V}{c^2}d\xi} = \frac{V\,d\tau + d\xi}{d\tau\left(1+\frac{V}{c^2}\cdot\frac{d\xi}{d\tau}\right)} = \frac{V+\frac{d\xi}{d\tau}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\frac{d\xi}{d\tau}} \overset{(18)}{=} \frac{V+\widetilde{v}_x}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}_x} \\
v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d\widetilde{y}}{\left(\frac{d\tau+\frac{V}{c^2}d\xi}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)} = \frac{d\widetilde{y}}{d\tau\left(1+\frac{V}{c^2}\cdot\frac{d\xi}{d\tau}\right)}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{\frac{d\widetilde{y}}{d\tau}\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\frac{d\xi}{d\tau}} \overset{(18)}{=} \frac{\widetilde{v}_y\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}_x} \\
v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{\widetilde{v}_z\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}_x}
\end{aligned}$$

Bezeichnet $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^\top$ den Geschwindigkeitsvektor des Objektes im System K und $\vec{\widetilde{v}} = (\widetilde{v}_\chi, \widetilde{v}_\xi, \widetilde{v}_\zeta)^\top$ den Geschwindigkeitsvektor im System $\widetilde{K}$, dann ist

$$\vec{v} = \frac{1}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}_x}\begin{pmatrix} V+\widetilde{v}_x \\ \widetilde{v}_y\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \\ \widetilde{v}_z\cdot\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \end{pmatrix} \tag{19}$$

5.1 Addition von Geschwindigkeiten

Nehmen wir an ein Objekt bewegt sich nur in $x-$ bzw. in $\xi-$Richtung. Dann gilt für den Geschwindigkeitsvektor in $\widetilde{K}$ offensichtlich

$$\vec{\widetilde{v}} = (\widetilde{v}_x, 0, 0)^\top$$

also $\widetilde{v}_y = \widetilde{v}_z = 0$. Der Betrag dieser Geschwindigkeit ist damit $\widetilde{v} := \left|\vec{\widetilde{v}}\right| = \widetilde{v}_x$. Für den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ ergibt sich nach (19)

$$\vec{v} = \frac{1}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}_x}\begin{pmatrix} V+\widetilde{v}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}}\begin{pmatrix} V+\widetilde{v} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und für den Betrag $v = |\vec{v}|$ damit:

$$v = \frac{V+\widetilde{v}}{1+\frac{V}{c^2}\cdot\widetilde{v}} \tag{20}$$

Mit (20) hat man nun eine Formel für die relativistische Addition von Geschwindigkeiten.

6 Vierergeschwindigkeit

Betrachten wir zwei Intertialsysteme, welche die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ (Dreiergeschwindigkeit) zu einander haben. Das v^2 in Gleichung (15) für die Zeitdilatation ist dann als das Skalarprodukt des Vektors $\vec{v}$ mit sich selbst zu verstehen:

$$v^2 = \vec{v} \circ \vec{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 \tag{21}$$

$\vec{v}$ ist also eine "Dreiergeschwindigkeit". Aus Gleichung (15) folgt

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{22}$$

Sei nun $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^\top$ mit $x_0 = ct$, die Vierergeschwindigkeit $\vec{u}$ ist definiert als die Ableitung des Ortes $\vec{x}$ nach der Eigenzeit τ:

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}\right)^\top$$

Aus der Definition ergibt sich dann

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} \overset{(22)}{=} \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left(c, \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right)^\top = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^\top \tag{23}$$

6.1 Viererimpuls

Aus (23) ergibt sich mit $\underline{p} = m\vec{u}$ der Viererimpuls

$$\underline{\vec{p}} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^\top = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \vec{p}\right)^\top \tag{24}$$

wobei der Teil $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ den relativistische Dreierimpuls darstellt. Wegen $\vec{p} = m_{rel}\vec{v}$ ist

$$m_{rel} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

die relativistische Masse.

Alle Komponenten des Vektors $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^\top$ haben die Dimension einer Länge, wobei in $x_0 = ct$ schon die Lichtgeschwindigkeit enthalten ist. Daher verwenden wir statt der Metrik (12) hier die Metrik η:

$$\eta(\vec{x}, \vec{y}) = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \tag{25}$$

Mit (25) lässt sich die Länge x eines Vektors $\vec{x}$ berechnen:

$$x = \sqrt{\eta(\vec{x}, \vec{x})} = \sqrt{x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}$$

Für den Viererimpuls (24) erhält man damit für das **Quadrat** seiner Länge:

$$\underline{p}^2 = \eta(\underline{\vec{p}}, \underline{\vec{p}}) = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 - \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2 = \frac{m^2c^2 - m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m^2c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} = m^2c^2 \tag{26}$$

7 Lagrangefunktion der SRT

Die Wirkung $\mathcal{S}$ ist allgemein definiert als zeitliche Integral (in einem Intervall, das wir hier der Einfachheit halber weglassen) der Lagrangefunktion $L = L(q, \dot{q}, t)$, es ist

$$\mathcal{S} = \int L\, dt \tag{27}$$

Sei τ nun die Eigenzeit, mit $ds = c d\tau$ und $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt$ ergibt sich für die Wirkung in der SRT:

$$\mathcal{S} \;=\; \int ds \;=\; \int c\, d\tau \;\overset{(22)}{=}\; \int c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{28}$$

Durch Vergleich von (27) und (28) erhält man nun die Lagrangefunktion der SRT. Multipliziert man die Lagrangefunktion noch mit einer Konstanten k, so lässt sich diese aus den Lagrangegleichungen wieder herausdividieren. Die Lagragnefunktion beschreibt also immernoch das gleiche physikalische System:

$$L \;=\; kc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{29}$$

Für kleine $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gilt die Näherung:

$$(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon \tag{30}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $v \ll c$ und damit v^2/c^2 sehr klein. Für $v \ll c$ lässt sich also (30) auf (29) anwenden und es ist

$$L \;=\; kc\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \;\approx\; kc\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2}\right) \;=\; kc - \frac{k}{2}\cdot\frac{v^2}{c}. \tag{31}$$

Die kinetische Energie im nichtrelativistischen Grenzfall ist $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$ und die Lagrangefunktion ist nichts anderes als die Differenz von kinetischer und potentieller Energie. In der SRT ist das Potential gleich Null (Es gibt z.B. kein Gravitationspotential), also ist $L = \frac{1}{2}mv^2$. Hinzufügen einer additiven Konstante ändert die Bewegungsgleichungen nicht (siehe Eichinvarianz), daher können wir als Lagrangefunktion des nichtrelativistischen Grenzfalls

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + E_{const} \tag{32}$$

annehmen. Vergleicht man nun (31) mit (32) so findet man $E_{const} = kc$ sowie

$$\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{k}{2}\cdot\frac{v^2}{c} \qquad \Rightarrow \qquad k = -mc.$$

Wegen dem Ansatz (29) ist die Lagrangefunktion der SRT damit also:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{33}$$

7.1 Lagrange und generalisierter Impuls

Im Lagrangeformalismus ist wegen der Homogenität des Raumes in der SRT der Impuls gegeben durch $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. Bei drei Raumrichtungen x_1, x_2, x_3 lassen sich die Komponenten des Impulses schreiben also $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ wobei $\dot{x}_i = v_i$ wieder die Geschwindigkeitskomponenten sind. Also ist der (Dreier-) Impuls gegeben durch

$$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \qquad \text{mit} \qquad p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}.$$

Nach (21) erhält man für die Ableitung des Geschwindigkeitsquadrates v^2 nach der Geschwindigkeitskomponente v_i mit $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\frac{\partial}{\partial v_i}\left[v^2\right] = \frac{\partial}{\partial v_i}\left[v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right] = 2v_i \tag{34}$$

Aus Gleichung (33) erhält man damit:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{\partial}{\partial v_i}\left[-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right] = -\frac{mc^2}{2}\cdot\frac{\frac{\partial}{\partial v_i}\left[-\frac{v^2}{c^2}\right]}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \overset{(34)}{=} \frac{m}{2}\cdot\frac{2v_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{35}$$

Man erhält also wieder den relativistischen Dreierimpuls

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

in Einklang mit dem entsprechenden Anteil in (24).

7.2 Lagrange und Energie

Aufgrund der Homogenität der Zeit gilt im Lagrangeformalismus die Energieerhaltung. Es ist

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = p\dot{q} - L$$

und bei mehrdimensionalen Systemen analog

$$E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L = \sum_i p_i\dot{q}_i - L$$

Mit (33) und (35) ergibt sich daraus hier:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial L}{\partial v_i}v_i - L = \sum_{i=1}^{3} p_i v_i - L = \sum_{i=1}^{3}\frac{mv_i}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}v_i + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{3}v_i^2}_{V^2} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

Für die Energie ergibt sich also der einfache Term:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{36}$$

Für $V = 0$ ergibt sich daraus die **Ruheenergie**

$$E = mc^2.$$

7.3 Viererimpuls und Energie

Aus (36) erhält man nach Division durch c die "Nullte" Komponente des Viererimpulses (24). Es ist also:

$$\underline{\vec{p}} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,,\,\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^\top = \left(\frac{E}{c}\,,\,\vec{p}\right)^\top \tag{37}$$

Nach (26) ist $\underline{p}^2 = \eta\left(\underline{\vec{p}},\underline{\vec{p}}\right) = m^2c^2$. Schreibt man den Viererimpuls in der Form (37) so ergibt das

$$m^2c^2 = \eta\left(\underline{\vec{p}},\underline{\vec{p}}\right) = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

und damit

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}$$

wobei $\vec{p}$ der relativistische Dreierimpuls ist.