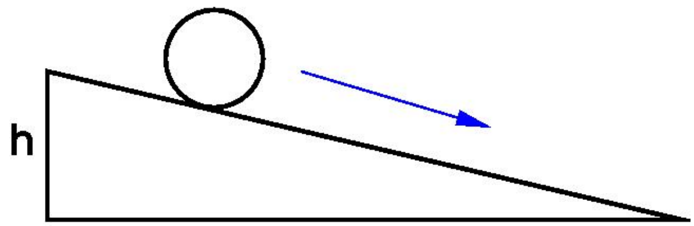
Ein Körper der Masse m bewegt sich abwärts auf einer schiefen Ebene und legt dabei eine Höhendifferenz h zurück.



Der Körper startet jeweils mit $v = 0$. Gesucht ist die Endgeschwindigkeit v.

1. Ein Quader **gleitet reibungsfrei** herunter.
2. Ein Voll-Zylinder **rollt** herunter.
3. Ein Hohl-Zylinder (Wandstärke≪Radius) **rollt** herunter.
4. Eine Kugel **rollt** herunter.
5. Eine Hohlkugel (Wandstärke≪Radius) **rollt** herunter.

Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2r^2}Jv^2 \tag{1}$$

1) $E_{pot} = E_{kin} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2$. Daraus folgt:

$$v = \sqrt{2gh} \quad \approx 1,414\sqrt{gh}$$

2) $E_{pot} = E_{rot} + E_{kin}$. Mit $J = \frac{1}{2}mr^2$ und (1) folgt

$$E_{rot} = \frac{1}{2r^2}Jv^2 = \frac{1}{4}mv^2$$

also:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{4}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ gh &= \frac{3}{4}v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad \approx 1,155\sqrt{gh} \end{aligned}$$

3) $E_{pot} = E_{rot} + E_{kin}$. Mit $J = mr^2$ und (1) folgt $E_{rot} = \frac{1}{2}mv^2$ also:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ gh &= v^2 \\ v &= \sqrt{gh} \end{aligned}$$

4) $E_{pot} = E_{rot} + E_{kin}$. Mit $J = \frac{2}{5}mr^2$ und (1) folgt $E_{rot} = \frac{1}{5}mv^2$ also:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{5}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ gh &= \frac{7}{10}v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{10}{7}gh} \quad \approx 1,195\sqrt{gh} \end{aligned}$$

5) $E_{pot} = E_{rot} + E_{kin}$. Mit $J = \frac{2}{3}mr^2$ und (1) folgt $E_{rot} = \frac{1}{3}mv^2$ also:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{3}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ gh &= \frac{5}{6}v^2 \\ v &= \sqrt{\frac{6}{5}gh} \quad \approx 1,095\sqrt{gh} \end{aligned}$$

Endgeschwindigkeit v hängt nur von **Trägheitsmoment** ab !

...und natürlich von h und g, der Term $\sqrt{gh}$ kommt aber überall vor.

$$v_{Gleiten} > v_{Kugel} > v_{Zylinder} > v_{Hohlkugel} > v_{Hohlzylinder}$$