Mathematisches Pendel

Punktmasse m hängt an Faden der Länge L. Auslenkung um den Winkel α.

Bogenlänge s der Auslenkung ist $s = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi L = \alpha L$. Wegen $L =$const. ergibt sich daraus für Geschwindigkeit und Beschleunigung

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}[\alpha L] = \dot{\alpha} L \\ a &= \frac{dv}{dt} = \ddot{\alpha} L \end{aligned}$$

und für die Kraft:

$$F = ma = mL\ddot{\alpha} \tag{1}$$

Für die Rückstellkraft F ergibt sich nach $\sin\alpha = F/F_G$:

$$F = mg\sin\alpha \tag{2}$$

Kombination von (1) und (2) ergibt dann die DGL $mL\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha$ und damit:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0 \tag{3}$$

Für kleine Auslenkungen ist $\sin\alpha \approx \alpha$ und es gilt:

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha \approx 0 \tag{4}$$

Physikalisches Pendel

Ein Körper mit Trägheitsmoment J, Schwerpunkt S und Masse m schwingt um eine Drehachse durch einen Punkt P. Der Abstand von P zu S ist r, es sei $\vec{r} := \left|\overrightarrow{PS}\right|$. $\vec{F} = m\vec{g}$ bewirkt die Rückstellkraft, wegen $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$ gilt für den Betrag:

$$M = \left|\vec{F} \times \vec{r}\right| = F \cdot r\sin\alpha = mgr\sin\alpha$$

Für das Drehmoment gilt ferner:

$$M = J\ddot{\alpha}$$

Also folgt die Bewegungsgleichung $J\ddot{\alpha} = -mgr\sin\alpha$ und damit:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgr}{J}\sin\alpha = 0 \tag{5}$$

Für kleine Auslenkungen ist wieder $\sin\alpha \approx \alpha$ und es gilt:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgr}{J}\alpha \approx 0 \tag{6}$$

Sonderfall mathematisches Pendel:
Hier ist $r = L$. Der Trägheitsmoment eines Massepunktes m im Abstand r vom Drehpunkt ist $J = mr^2 = mL^2$. Aus (5) folgt damit:

$$0 = \ddot{\alpha} + \frac{mgr}{J}\sin\alpha = \ddot{\alpha} + \frac{mgL}{mL^2}\sin\alpha = \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha$$

Man erhält also wieder (3).

Die Differentialgleichungen (4) und (6) für kleine Auslenkungen haben jeweils die Struktur

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{7}$$

wobei $\dot{f} := \frac{df}{dt}$ die Ableitung nach der Zeit t ist. Multipliziert man die Gleichung mit $\dot{y}$ so folgt

$$0 = \ddot{y}\dot{y} + \omega^2 y\dot{y} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}y^2\right].$$

Integration nach t auf beiden Seiten ergibt

$$\frac{1}{2}\dot{y}^2 + \omega^2 \cdot \frac{1}{2}y^2 = c$$

wobei c die Integrationskonstanten enthält. Daraus folgt

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2c - \omega^2 y^2}$$

und damit die Integralgleichung:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 y^2}{2c}}} = \sqrt{2c} \int dt \tag{8}$$

Das Integral auf der linken Seite lässt sich durch die Substitution

$$\sin z = \frac{\omega y}{\sqrt{2c}}$$

lösen. Es ist $dy = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \cos(z)\, dz$ und wegen $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ folgt:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 y^2}{2c}}} = \int \frac{\frac{\sqrt{2c}}{\omega} \cos(z)\, dz}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \int dz = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} z = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega y}{\sqrt{2c}}\right)$$

Die Integralgleichung (8) wird damit zu

$$\frac{\sqrt{2c}}{\omega} \arcsin\left(\frac{\omega y}{\sqrt{2c}}\right) = \sqrt{2c} \cdot (t + \varphi_0)$$

wobei die Integrationskonstanten in φ_0 enthalten sind. Auflösen der Gleichung ergibt

$$y = \frac{\sqrt{2c}}{\omega} \sin(\omega(t + \varphi_0)) = A \sin(\omega(t + \varphi_0))$$

wobei $A = \sqrt{2c}/\omega$ die Amplitude ist. Die DGL (7) wird also gelöst von

$$y(t) = A \sin(\omega(t + \varphi_0))$$

Konkrete Lösungen:
Das mathematische Pendel liefert (4) also $\omega = \sqrt{g/L}$. Die Lösung ist:

$$\alpha(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}}(t + \varphi_0)\right)$$

Für das physikalische Pendel, siehe (6), ergibt sich $\omega = \sqrt{mgr/J}$. Die Lösung ist:

$$\alpha(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{mgr}{J}}(t + \varphi_0)\right)$$

Für die Schwingung einer Feder der Härte k mit angehängter Masse m gilt $F = m\ddot{x} = -kx$ also $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ und damit $\omega = \sqrt{k/m}$. Es ergibt sich die Lösung:

$$x(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \varphi_0)\right)$$