Das totale Differential df einer Funktion f, die von Koordinaten $\{x_1, \dots, x_n\}$ abhängt ist:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} dx_n \quad = \quad \vec{\nabla} f \circ d\vec{x}$$

Für die Ableitung $\frac{df}{d\varepsilon}$ gilt damit:

$$\frac{df}{d\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{d\varepsilon} + \dots + \frac{\partial L}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{d\varepsilon} \quad = \quad \vec{\nabla} f \circ \cdot \frac{d\vec{x}}{d\varepsilon} \tag{1}$$

Falls ein x_i nicht von ε abhängt ist natürlich $\frac{dx_i}{d\varepsilon} = 0$ und der entsprechende Summand fällt weg.

Sei $x(t)$ der Ort (z.B. eines Körpers) und $v(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t)$ die Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit t. Ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ und $\xi(t)$ eine Kurve mit kleinen Werten. Eine **Variation** von Ort x und Geschwindigkeit $\dot{x}$ auf dem Intervall $t \in [a, b]$ ist gegeben durch:

$$q(t, \varepsilon) = x(t) + \varepsilon \xi(t) \qquad \text{und} \qquad \dot{q}(t, \varepsilon) = \dot{x}(t) + \varepsilon \dot{\xi}(t) \tag{2}$$

Dabei sollen die Werte am Anfang und am Ende des Intervalls $[a, b]$ mit denen der Ursprünglichen Ortskurve $x(t)$ übereinstimmen, aus $x(a) = x(a) + \varepsilon \xi(a)$ und $x(b) = x(b) + \varepsilon \xi(b)$ ergeben sich also die Randbedingungen:

$$\xi(a) = 0 \quad \text{und} \quad \xi(b) = 0 \tag{3}$$

Für die Variationen (2) gilt offensichtlich:

$$\frac{dq}{d\varepsilon} = \xi \qquad \text{und} \qquad \frac{d\dot{q}}{d\varepsilon} = \dot{\xi} \tag{4}$$

Sei nun L eine Funktion, die wiederum von den Orts- und Geschwindigkeitsvariationen (2) und der Zeit abhängt, also:

$$L = L\left(q(t, \varepsilon),\ \dot{q}(t, \varepsilon),\ t\right)$$

Aus Gleichung (1) folgt zusammen mit (4) und $\frac{dt}{d\varepsilon} = 0$:

$$\frac{dL}{d\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \frac{dq}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{d\dot{q}}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial t} \cdot \frac{dt}{d\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial q} \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\xi} \tag{5}$$

Die **Wirkung** S ist definiert als Integral über die sogenannte Lagrangefunktion L:

$$S(\varepsilon) = \int_a^b L\left(q(t, \varepsilon),\ \dot{q}(t, \varepsilon),\ t\right) dt$$

Gesucht ist diejenige Variation von L, für welche die Wirkung S **extremal** wird. Notwendigerweise gilt $\frac{dS}{d\varepsilon} = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dS}{d\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b L\, dt = \int_a^b \frac{dL}{d\varepsilon}\, dt \overset{(5)}{=} \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q} \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\xi} \right) dt = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \xi\, dt + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{\xi}\, dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \xi\, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \xi \right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right] \xi\, dt \overset{(3)}{=} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial q} \xi\, dt - \int_a^b \xi \cdot \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\, dt = \int_a^b \xi \cdot \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt \end{aligned}$$

Da ξ im Allgemeinen von Null verschieden ist, muss

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

Anmerkung: Der Lagrange Formalismus lässt sich auf mehrdimensionale Systeme übertragen.

Energieerhaltung *Aus der Homogenität der Zeit folgt Energieerhaltung.*
In abgeschlossenen Systemen sind alle Zeitpunkte äquivalent. Ein Experiment soll zu allen Zeiten reproduzierbar sein. Ein Pendel z.B. schwingt immer nach den selben physikalischen Gesetzen, welche sich nicht mit der Zeit ändern. Also kann auch die Lagrange-Funktion nicht explizit von der Zeit abhängen. Wenn L nicht explizit von t abhängt folgt:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q$$

ist

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\frac{dq}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\frac{d\dot q}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q}\cdot\dot q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\ddot q \tag{6}$$

Aus der Lagrange Gleichung (**??**) folgt $\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}$. Zusammen mit der Produktregel wird (6) zu

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]\cdot\dot q + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\cdot\ddot q = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q\right].$$

Subtraktion von $\frac{dL}{dt}$ ergibt

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right] = 0.$$

Offensichtlich ist der Term in der Klammer zeitlich Konstant. Es handelt sich um die Energie (abgeschlossenes System):

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L$$

Impulserhaltung *Aus der Homgenität des Raumes folgt Translationsinvarianz.*
Variation von L bezüglich der Koordinate q ändert L nicht, d.h. $L(q+\Delta q, \dot q, t) = L(q, \dot q, t)$. Mit (**??**) und der Lagrange Gleichung (**??**) folgt:

$$0 = L(q+\Delta q, \dot q, t) - L(q, \dot q, t) = \frac{\partial L}{\partial q}\Delta q = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right]\Delta q$$

Offenbar muss $\frac{\partial L}{\partial \dot q}$ zeitlich konstant sein. Der Impuls ist gegeben durch

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$$

Prinzip: Aus einer Symmetrie folgt eine Erhaltungsgröße (die Umkehrung gilt nicht).

Eichinvarianz der Lagrangegleichung

$$\tilde L = L + \frac{d}{dt}f(q,t)$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial t}dt \Rightarrow \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\dot q + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (*)$$

$$\frac{\partial \tilde L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde L}{\partial \dot q} = \frac{\partial}{\partial q}\left[L + \frac{d}{dt}f\right] - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left[L + \frac{d}{dt}f\right]$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{df}{dt} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{\partial}{\partial \dot q}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\cdot\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}\right]\right]$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{=0} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{df}{dt} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot q}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\right]\dot q + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\underbrace{\frac{\partial \dot q}{\partial \dot q}}_{=1} + \frac{\partial}{\partial \dot q}\frac{\partial f}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial q}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot q}}_{=0}\cdot\dot q + \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot q}}_{=0}\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q} = 0 \quad \square$$