

Ein Quantenobjekt läuft durch einen Spalt der Breite  $b$ . Sei  $x_M$  die Mitte eines Spaltes, dann kann man mit Sicherheit sagen, dass das Teilchen "an der Stelle"

$$x = x_M \pm \frac{b}{2}$$

durch den Spalt gelaufen ist. Die Ortsunschärfe kann hier als  $\Delta x = \frac{b}{2}$  definiert werden. Jetzt verkleinert man den Spalt immer weiter um die Position genauer zu bestimmen. Aufgrund der Wellennatur treten Beugungseffekte auf. Je kleiner der Spalt, desto ausgedehnter das Interferenzmuster auf einem Beobachtungsschirm. Die Bewegungsrichtung (Richtungsvektor) des einzelnen Teilchens ist also beim Durchlaufen des Spalts ebenfalls nur mit einer gewissen Unschärfe bekannt. Durch die Beugung entsteht eine zusätzliche Impulsunschärfe  $\Delta p_x$  **in Richtung**  $\Delta x$ .

### Heisenberg'sche Unschärferelation:

Es ist unmöglich Ort und Impuls eines Quantenobjektes gleichzeitig exakt zu bestimmen! Für **Ortsunschärfe**  $\Delta x$  und **Impulsunschärfe**  $\Delta p_x$  (im Folgenden einfach als  $\Delta p$  bezeichnet) gilt

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

wobei  $\hbar := \frac{h}{2\pi} \approx 10^{-34} Js$  das **reduzierte Plancksche Wirkungsquantum**<sup>1</sup> ist. Die Heisenberg'sche Unschärferelation lässt sich also auch schreiben als:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Die **Unschärfe ist prinzipieller Natur!** Sie resultiert aus den Wellencharakter der Materie.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten  $\Delta x$  zu definieren. Die Abschätzung in (1) ist abhängig von der Definition der Ortsunschärfe. Wird  $\Delta x$  als Spaltbreite definiert ( $\Delta x = b$ ), so gilt z.B.  $\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$ .

### Aufgaben:

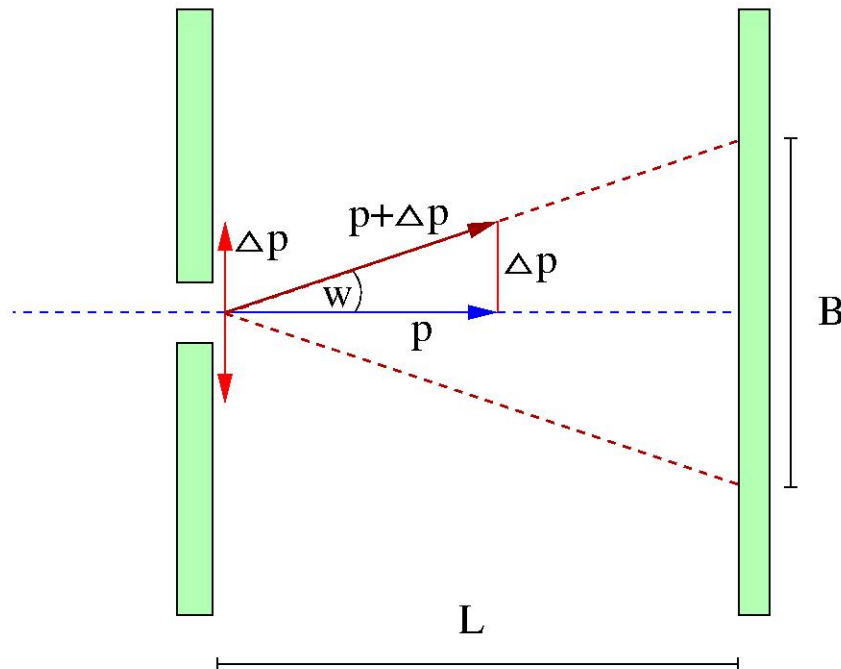
1. Der Ort eines Körpers der Masse  $350g$  wird mit blauem Licht bis auf dessen Wellenlänge von  $\lambda = 420nm$  genau ermittelt. Mit welcher Genauigkeit lässt sich die Geschwindigkeit  $v$  der Masse angeben?
2. Löse A1 für Fruchtfliege ( $0,2\mu g$ ), Bakterie ( $10^{-15}kg$ ) und DNA Molekül ( $1,65 \cdot 10^{-21}kg$ ).
3. Ein Goldatom  $m = 10^{-25}kg$  soll bis auf eine Unschärfe von  $\Delta x = 10^{-10}m$  lokalisiert werden.

<sup>1</sup>Der Wert des **planckschen Wirkungsquantums**  $h = 2\pi\hbar$  beträgt  $h \approx 6,626 \cdot 10^{-34} Js$ .

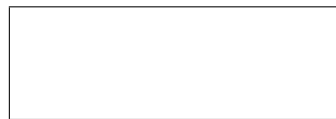
Licht mit dem Impuls

$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (2)$$

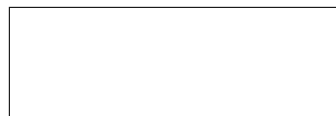
fällt durch einen Spalt. Der Projektionsschirm hat die Entfernung  $L$  zum Spalt. Die Größen  $p$  und  $\Delta p$  sind hier Vektoren:



In dem Dreieck mit Winkel  $w$ , Ankathete  $p$  und Gegenkathete  $\Delta p$  gilt \_\_\_\_\_ . Analog stellt der Abstand  $L$  die Ankathete bezüglich des Winkels  $w$  in einem anderen Dreieck in der Abbildung dar. Durch Gleichsetzen der beiden Formeln erhält man<sup>2</sup>:



Verwendet man nun Gleichung (2) und die Heisenberg'sche Unschärferelation<sup>3</sup>, so lässt sich eine Abschätzung für die minimale Breite  $B$  des Interferenzmusters in Abhängigkeit der Spaltbreite  $2\Delta x$  angeben. Es ist:



<sup>2</sup>Dieses Resultat erhält man auch direkt mit den Strahlensätzen.

<sup>3</sup> $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ , siehe Gleichung (1)