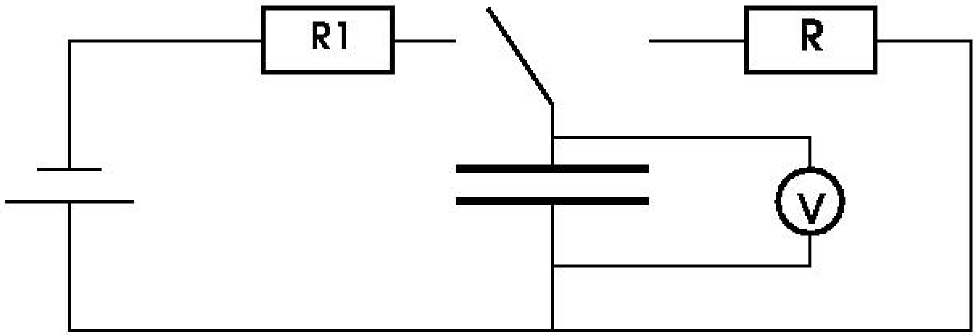
1. Schaltung

In der Abbildung ist Schaltung, mit welcher der zeitliche Verlauf der Spannung aufgenommen werden kann:



Durch Schließen des Schalters nach links lädt man den Kondensator über den Widerstand $R1$ auf (Stromkreis I). Hier kann etwa ein Widerstand von $1k\Omega$ verwandt werden. Nach Umlegen des Schalters entlädt sich der Kondensator über den Entladewiderstand R (Stromkreis II). Man erhält den Spannungsabfall $U(t)$. Der Entladevorgang sollte ausreichend langsam stattfinden, um eine Messreihe aufnehmen zu können. Dafür müssen Kapazität des Kondensators und Grösse des Widerstands R aufeinander abgestimmt sein. Die Spannung halbiert sich jeweils nach einem Zeitintervall von $T_H = -RC\ln 0,5 \approx 0,7RC$. Geeignet ist etwa Kondensator mit $C = 2500\,\mu F$ und einen Widerstand mit $R = 16k\Omega$.

2. Differentialgleichung für den Entladevorgang

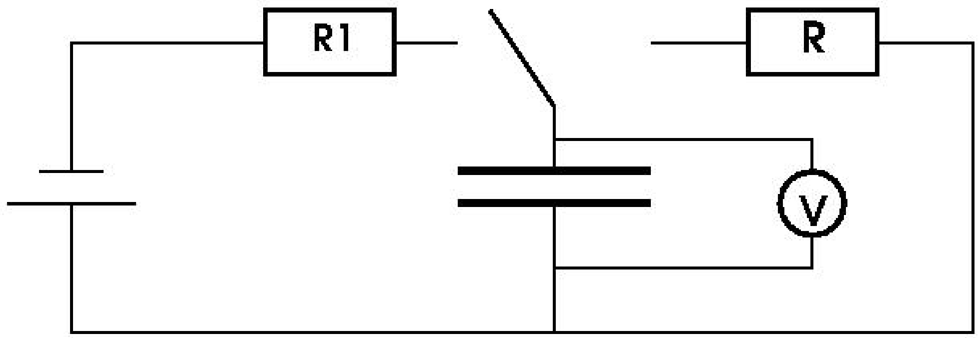
Der Kondensator wird zunächst im Stromkreis I mit der Spannung U_0 geladen. Für die Spannung U_{R_1} am Widerstand R_1 und der Spannung U_C am Kondensator gilt offensichtlich $U_0 = U_{R_1} + U_C$. Beim Entladen in Stromkreis II gibt es keine Spannungsquelle. Also ist hier $U_0 = 0$ und analog folgt $0 = U_R + U_C$. Für den Widerstand haben wir $U_R = RI$. Beim Kondensator besteht zwischen Ladung Q, Spannung U und Kapazität C die Beziehung $Q = CU$, also ist $U_C = \frac{Q}{C}$. Wir erhalten also die Gleichung:

Wir lösen diese Gleichung nach der Stromstärke I auf und verwenden dann $I = \frac{dQ}{dt}$:

Aus dieser Differentialgleichung für den Ladungsverlauf $Q(t)$ lässt sich mit der Formel $Q = CU$ eine Differentialgleichung für den Spannungsverlauf $U(t)$ erhalten (Hinweis: Die Kapazität C des Kondensators ist konstant):

1. Schaltung

In der Abbildung ist Schaltung, mit welcher der zeitliche Verlauf der Spannung aufgenommen werden kann:



Durch Schließen des Schalters nach links lädt man den Kondensator über den Widerstand $R1$ auf (Stromkreis I). Hier kann etwa ein Widerstand von $1k\Omega$ verwandt werden. Nach Umlegen des Schalters entlädt sich der Kondensator über den Entladewiderstand R (Stromkreis II). Man erhält den Spannungsabfall $U(t)$. Der Entladevorgang sollte ausreichend langsam stattfinden, um eine Messreihe aufnehmen zu können. Dafür müssen Kapazität des Kondensators und Grösse des Widerstands R aufeinander abgestimmt sein. Die Spannung halbiert sich jeweils nach einem Zeitintervall von $T_H = -RC\ln 0,5 \approx 0,7RC$. Geeignet ist etwa Kondensator mit $C = 2500\,\mu F$ und einen Widerstand mit $R = 16k\Omega$.

2. Differentialgleichung für den Entladevorgang

Der Kondensator wird zunächst im Stromkreis I mit der Spannung U_0 geladen. Für die Spannung U_{R_1} am Widerstand R_1 und der Spannung U_C am Kondensator gilt offensichtlich $U_0 = U_{R_1} + U_C$. Beim Entladen in Stromkreis II gibt es keine Spannungsquelle. Also ist hier $U_0 = 0$ und analog folgt $0 = U_R + U_C$. Für den Widerstand haben wir $U_R = RI$. Beim Kondensator besteht zwischen Ladung Q, Spannung U und Kapazität C die Beziehung $Q = CU$, also ist $U_C = \frac{Q}{C}$. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\boxed{RI + \frac{Q}{C} = 0}$$

Wir lösen diese Gleichung nach der Stromstärke I auf und verwenden dann $I = \frac{dQ}{dt}$:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q}$$

Aus dieser Differentialgleichung für den Ladungsverlauf $Q\,(t)$ lässt sich mit der Formel $Q = CU$ eine Differentialgleichung für den Spannungsverlauf $U\,(t)$ erhalten (Hinweis: Die Kapazität C des Kondensators ist konstant):

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U}$$

Lösen der Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U}$$

Wir lösen durch "Trennung der Variablen", es folgt:

$$\frac{dU}{U} = -\frac{1}{RC}dt$$

Diese Gleichung lässt sich integrieren, R und C sind Konstanten

$$\int \frac{1}{U}dU = -\frac{1}{RC}\int dt$$

also:

$$\ln U = -\frac{1}{RC}t + k$$

wobei k die Integrationskonstanten beider Seiten enthält. Auflösen nach U ergibt:

$$U = \exp\left(-\frac{1}{RC}t + k\right) = \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)\underbrace{\exp(k)}_{:=U_0}$$

also

$$\boxed{U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{1}{RC}t\right)}$$

Die Integrationskonstanten sind in U_0 zusammengefasst worden.