

Bisher kannten wir Gleichungen, deren Lösung eine Zahl oder eine Menge von Zahlen ist. Die Gleichung $x^2 - 4 = 0$ hat zum Beispiel die Lösungen $x = 2$ und $x = -2$. Zur Überprüfung machen wir die Probe: $2^2 - 4 = 0$ und $(-2)^2 - 4 = 0$.

Differentialgleichungen sind Gleichungen, in denen Funktionen und deren **Ableitungen** auftreten. Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine **Funktion**.

1. **Aufgabe:**

- (a) Berechne die erste Ableitung $f'(x)$ der Funktion $f(x) = e^{2x}$.
- (b) Zeige, dass die Gleichung $f'(x) - 2f(x) = 0$ erfüllt ist.
- (c) Zeige, dass $f(x) = 5e^{2x}$ und sogar $f(x) = ce^{2x}$ mit $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls Lösungen sind.

Die Gleichung $f'(x) - 2f(x) = 0$ ist eine **Differentialgleichung**, kurz DGL. Zur Abkürzung schreibt man auch $f' - 2f = 0$.

2. **Aufgabe:**

- (a) Finde eine Lösung für $f' - 3f = 0$ und zeige die Existenz der Lösung (Probe).
- (b) Welche spezielle Lösung erfüllt zusätzlich $f(0) = 7$?

Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung lässt sich z.B. durch Vorgabe des Anfangswertes $f(0)$ noch spezifizieren. Eine solche Problemstellung nennt man **Anfangswert-Problem**, kurz AWP.

3. **Aufgabe:**

- (a) Zeige: Das AWP $f' + 0,5f = 0$, $f(1) = \frac{2}{\sqrt{e}}$ besitzt die Lösung $f(x) = 2e^{-0,5x}$.
- (b) Warum ist $f(x) = e^{-0,5x}$ hier keine Lösung, obwohl die DGL erfüllt ist?
- (c) Löse das AWP $f' + 4f = 0$, $f(0) = 9$

4. **Aufgabe:**

- (a) Sei $a, f_0 \in \mathbb{R}$. Löse das AWP $f' + af = 0$, $f(0) = f_0$ (mit Herleitung der Lösung). **Tipp:** $\frac{f'}{f} = [\ln f]'$.
- (b) Sei $a(x)$ eine Funktion und $A(x)$ die Stammfunktion von $a(x)$, so dass $A'(x) = a(x)$. Löse allgemein die Gleichung:

$$f' + a(x)f = 0$$

(Differentialgleichungen dieser Art nennt man homogen.)

5. **Aufgabe:**

Die Differentialgleichung

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}U = 0 \quad (1)$$

gibt die Spannung U als Funktion in Abhängigkeit der Zeit t beim Entladen eines Kondensators an.

- (a) Löse die DGL (1) allgemein.
- (b) Es wird ein Kondensator mit der Kapazität von $C = 2500\mu F$ entladen, der Widerstand beträgt $R = 16k\Omega$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt der Entladevorgang des Kondensators, die Spannung beträgt $3V$. Welche Funktionsgleichung beschreibt den zeitlichen Verlauf $U(t)$ nach Abschalten der Spannungsquelle?
- (c) Zeichne die Funktion U in ein geeignetes Koordinatensystem.

6. **Aufgabe:**

- (a) Zu welchem Zeitpunkt T_H ist die Spannung nach dem Ausschalten eines Kondensators auf die Hälfte des Anfangswertes abgesunken? Gib T_H in Abhängigkeit der Kapazität C und des Widerstands R an.
- (b) Wann beträgt die Spannung noch 10 % des Anfangswertes?
- (c) Berechne T_H für die Werte aus Aufgabe (5b).