Herleitung aus der Energieerhaltung

Betrachte ein Massenelement dm einer inkompressiblen Flüssigkeit. Das Massenelement dm befinde sich zunächst an einer Stelle S_1mit dem Druck p_1. Das Massenelement dm hat zu diesem Zeitpunkt die Geschwindigkeit v_1 und befindet sich in der Höhe h_1. Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie beträgt also

$$E_1 = E_{1,kin} + E_{1,pot} = \frac{1}{2} v_1^2 dm + gh_1 dm.$$

Das Massenelement dm wird nun durch eine Kraft F um eine Strecke ds von S_1 an die Stelle S_2 verschoben. Hier herrscht der Druck p_2, das Massenelement dm hat dort die Geschwindigkeit v_2 und befindet sich in der Höhe h_2. Die Gesamtenergie ist nun

$$E_2 = E_{2,kin} + E_{2,pot} = \frac{1}{2} v_2^2 dm + gh_2 dm.$$

Die Energiedifferenz zwischen den Punkten S_1 und S_2 beträgt:

$$dE = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} v_2^2 dm + gh_2 dm - \left(\frac{1}{2} v_1^2 dm + gh_1 dm \right) = \left\{ \frac{1}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right) + g \left(h_2 - h_1 \right) \right\} dm \tag{1}$$

Angenommen es ist $E_2 > E_1$ und damit $dE > 0$. Um dm von S_1 nach S_2 zu transportieren ist dann Energie nötig. Offensichtlich muss in diesem Fall $p_1 > p_2$ sein, so dass $p = p_1 - p_2 > 0$: Der Druckunterschied p leistet die für die Energiedifferenz nötige Arbeit, indem die oben bereits erwähnte Kraft $F = pA$ auf den Querschnitt A der Flüssigkeitssäule wirkt. Die Arbeit dW bei diesem Vorgang ist

$$dW = F\, ds = p \underbrace{A\, ds}_{dV} = p\, dV = \left(p_1 - p_2 \right)\, dV. \tag{2}$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) erhält man nun

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right) + g \left(h_2 - h_1 \right) \right\} dm = \left(p_1 - p_2 \right)\, dV.$$

Mit $dm = \rho\, dV$ ergibt sich daraus:

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right) + g \left(h_2 - h_1 \right) \right\} \rho\, dV = \left(p_1 - p_2 \right)\, dV$$

Die **Bernoulli Gleichung** ist also

$$\frac{\rho}{2} \left(v_2^2 - v_1^2 \right) + \rho g \left(h_2 - h_1 \right) = p_1 - p_2$$

oder

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_2 \tag{3}$$

Ausströmgeschwindigkeit bei vernachlässigbarer Höhendifferenz

Angenommen es ist $v_1 = 0$ und man darf $h_1 = h_2$ annehmen. Aus der Bernoulli Gleichung (3) folgt dann

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2.$$

Auflösen nach $v := v_2$ ergibt nun

$$v = \sqrt{\frac{2 \left(p_1 - p_2 \right)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2p}{\rho}} \tag{4}$$

Volumenstrom durch einen Querschnitt

Der Volumenstrom (auch Durchflussrate) ist definiert als

$$Q := \frac{dV}{dt}$$

Durch eine zeitlich unveränderte Querschittsfläche A strömt demnach

$$Q = \frac{d}{dt} V = \frac{d}{dt} \left[As \right] = A \frac{ds}{dt} = Av$$