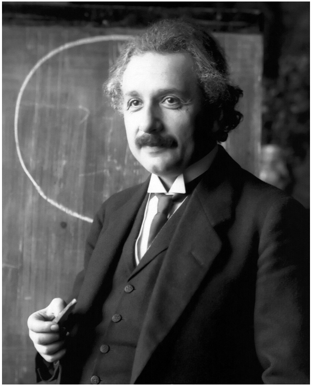
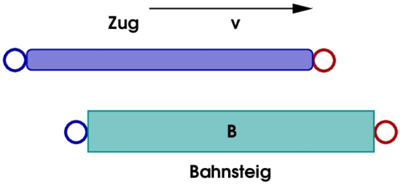
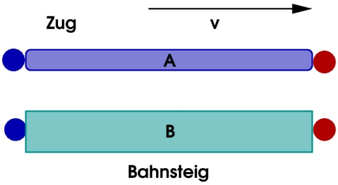


Bild: Wikipedia

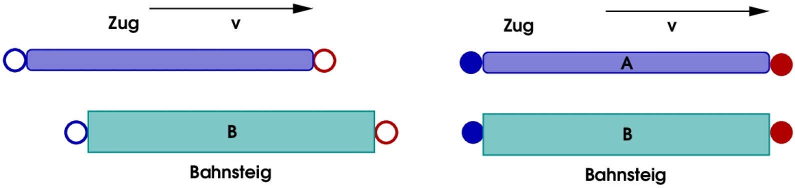
Albert Einstein

Gedankenexperiment "Zug/Bahnsteig" mathematisch beschreibbar?



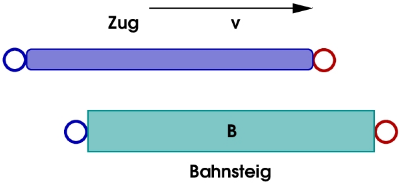


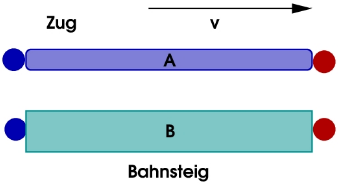
Gedankenexperiment "Zug/Bahnsteig" mathematisch beschreibbar?



Bahnsteig und Zug sind im **selben Ruhesystem** gleichlang!

Gedankenexperiment “Zug/Bahnsteig” mathematisch beschreibbar?





Bahnsteig und Zug sind im **selben Ruhesystem** gleichlang!

Bewegte Objekte sind in Bewegungsrichtung verkürzt!

Längenmessungen hängen vom Inertialsystem ab!

Längenmessungen hängen vom Inertialsystem ab! ABER:

4-dim. Raumzeitabstand in allen Inertialsystemen gleich!

Längenmessungen hängen vom Inertialsystem ab! ABER:

4-dim. Raumzeitabstand in allen Inertialsystemen gleich!

Wie lässt sich die Situation mit der Minkowski-Metrik

$$\Delta s^2 - c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

beschreiben?

Längenmessungen hängen vom Inertialsystem ab! ABER:

4-dim. Raumzeitabstand in allen Inertialsystemen gleich!

Wie lässt sich die Situation mit der Minkowski-Metrik

$$\Delta s^2 - c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

beschreiben?

Bewegung $\vec{v}$ entlang der $x-$Achse, dabei ist $\Delta y = \Delta z = 0$.

Längenmessungen hängen vom Inertialsystem ab! ABER:

4-dim. Raumzeitabstand in allen Inertialsystemen gleich!

Wie lässt sich die Situation mit der Minkowski-Metrik

$$\Delta s^2 - c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

beschreiben?

Bewegung $\vec{v}$ entlang der $x-$Achse, dabei ist $\Delta y = \Delta z = 0$.

Beobachter*innen jeweils in der Mitte von Bahnsteig bzw. Zug:

$\Rightarrow$ A sieht die Lichtsignale des Zugs gleichzeitg, B die des Bahnhofs

Aus Sicht des Inertialsystems Bahnsteig

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_A = 0$, Zuglänge $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = L_A^2$

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_A = 0$, Zuglänge $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = L_A^2$

B beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Zugs!

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_A = 0$, Zuglänge $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = L_A^2$

B beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Zugs!

Also $\Delta t_B = T_B > 0$, $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_B^2 + L_B^2$

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_A = 0$, Zuglänge $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = L_A^2$

B beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Zugs!

Also $\Delta t_B = T_B > 0$, $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_B^2 + L_B^2$

Raumzeitabstand Δs^2 in allen Inertialsystemen gleich!

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_A = 0$, Zuglänge $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = L_A^2$

B beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Zugs!

Also $\Delta t_B = T_B > 0$, $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_B^2 + L_B^2$

Raumzeitabstand Δs^2 in allen Inertialsystemen gleich!

Aus $L_A^2 = -c^2 T_B^2 + L_B^2$ folgt $L_A < L_B$

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Zugs**:

Für A im Zug sind die Lichtsignale des Zugs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_A = 0$, Zuglänge $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = L_A^2$

B beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Zugs!

Also $\Delta t_B = T_B > 0$, $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_B^2 + L_B^2$

Raumzeitabstand Δs^2 in allen Inertialsystemen gleich!

Aus $L_A^2 = -c^2 T_B^2 + L_B^2$ folgt $L_A < L_B$

Zug kürzer als Bahnsteig!

Aus Sicht des Inertialsystems Zug

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Bahnhofs**:

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Bahnhofs**:

Für B im Bahnhof sind die Lichtsignale des Bahnhofs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_B = 0$, Zuglänge $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = L_B^2$

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Bahnhofs**:

Für B im Bahnhof sind die Lichtsignale des Bahnhofs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_B = 0$, Zuglänge $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = L_B^2$

A beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Bahnhofs!

Also $\Delta t_A = T_A > 0$, $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_A^2 + L_A^2$

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Bahnhofs**:

Für B im Bahnhof sind die Lichtsignale des Bahnhofs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_B = 0$, Zuglänge $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = L_B^2$

A beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Bahnhofs!

Also $\Delta t_A = T_A > 0$, $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_A^2 + L_A^2$

Raumzeitabstand Δs^2 in allen Inertialsystemen gleich!

Aus $L_B^2 = -c^2 T_A^2 + L_A^2$ folgt $L_B < L_A$

Betrachte den Raumzeitabstand der **Lichtsignale des Bahnhofs**:

Für B im Bahnhof sind die Lichtsignale des Bahnhofs gleichzeitig!

also ist $\Delta t_B = 0$, Zuglänge $\Delta x_B = L_B$ und damit $\Delta s^2 = L_B^2$

A beobachtet Zeitunterschied bei Lichtsignalen des Bahnhofs!

Also $\Delta t_A = T_A > 0$, $\Delta x_A = L_A$ und damit $\Delta s^2 = -c^2 T_A^2 + L_A^2$

Raumzeitabstand Δs^2 in allen Inertialsystemen gleich!

Aus $L_B^2 = -c^2 T_A^2 + L_A^2$ folgt $L_B < L_A$

Bahnsteig kürzer als Zug!

Ziel ist Ereignisse in verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit V beträgt, physikalisch zu beschreiben.

Ziel ist Ereignisse in verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit V beträgt, physikalisch zu beschreiben.

Angenommen ein Zug hat eine Geschwindigkeit von $200\frac{km}{h}$,
eine Person läuft im Zug mit $7\frac{km}{h}$ in Fahrtrichtung.

Ziel ist Ereignisse in verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit V beträgt, physikalisch zu beschreiben.

Angenommen ein Zug hat eine Geschwindigkeit von $200\frac{km}{h}$, eine Person läuft im Zug mit $7\frac{km}{h}$ in Fahrtrichtung.

Die Person bewegt sich dann relativ zum Bahnsteig mit $207\frac{km}{h}$.

Ziel ist Ereignisse in verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit V beträgt, physikalisch zu beschreiben.

Angenommen ein Zug hat eine Geschwindigkeit von $200\frac{km}{h}$, eine Person läuft im Zug mit $7\frac{km}{h}$ in Fahrtrichtung.

Die Person bewegt sich dann relativ zum Bahnsteig mit $207\frac{km}{h}$.

System Bahnsteig Koord. (t, x, y, z), System Zug (t', x', y', z')

Galilei-Transformation $t = t', \; x = x' + Vt, \; y = y', \; z = z'$

Ziel ist Ereignisse in verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit V beträgt, physikalisch zu beschreiben.

Angenommen ein Zug hat eine Geschwindigkeit von $200\frac{km}{h}$, eine Person läuft im Zug mit $7\frac{km}{h}$ in Fahrtrichtung.

Die Person bewegt sich dann relativ zum Bahnsteig mit $207\frac{km}{h}$.

System Bahnsteig Koord. (t, x, y, z), System Zug (t', x', y', z')

Galilei-Transformation $t = t', \;\; x = x' + Vt, \;\; y = y', \;\; z = z'$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}[x' + Vt] = \frac{dx'}{dt} + V = v' + V = 7\frac{km}{h} + 200\frac{km}{h} = 207\frac{km}{h}$$

Ziel ist Ereignisse in verschiedenen Koordinatensystemen, deren Relativgeschwindigkeit V beträgt, physikalisch zu beschreiben.

Angenommen ein Zug hat eine Geschwindigkeit von $200\frac{km}{h}$, eine Person läuft im Zug mit $7\frac{km}{h}$ in Fahrtrichtung.

Die Person bewegt sich dann relativ zum Bahnsteig mit $207\frac{km}{h}$.

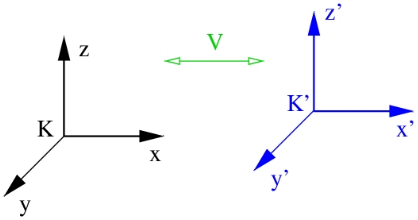
System Bahnsteig Koord. (t, x, y, z), System Zug (t', x', y', z')

Galilei-Transformation $t = t', \;\; x = x' + Vt, \;\; y = y', \;\; z = z'$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[x' + Vt\right] = \frac{dx'}{dt} + V = v' + V = 7\frac{km}{h} + 200\frac{km}{h} = 207\frac{km}{h}$$

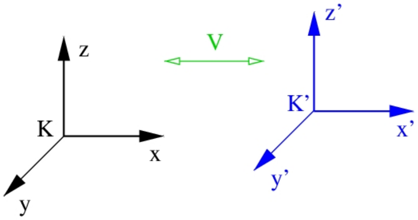
Für sehr hohe Geschwindigkeiten ungültig!

Die gesuchte Transformation soll Δs^2 unverändert lassen!



Relativgeschwindigkeit V in $x-$Richtung, Achsen x und x' parallel

Die gesuchte Transformation soll Δs^2 unverändert lassen!



Relativgeschwindigkeit V in $x-$Richtung, Achsen x und x' parallel

Lorentztransformation lässt 4-dim Raumzeitabstand unverändert:

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \quad x = \frac{t' V + x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} , \quad y = y' , \quad z = z'$$

Betrachte Ereignisse $E_1\,(t_1', x_1', y_1', z_1')$ und $E_2\,(t_2', x_2', y_2', z_2')$ im Zug

Betrachte Ereignisse $E_1\,(t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ und $E_2\,(t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$ im Zug

$\Delta t' = t'_2 - t'_1\,, \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1\,, \quad \Delta y' = y'_2 - y'_1\,, \quad \Delta z' = z'_2 - z'_1$

Raumzeitabstand:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

Betrachte Ereignisse $E_1\,(t'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$ und $E_2\,(t'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$ im Zug

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1\,, \quad \Delta x' = x'_2 - x'_1\,, \quad \Delta y' = y'_2 - y'_1\,, \quad \Delta z' = z'_2 - z'_1$$

Raumzeitabstand:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

Um die Ereignisse im Koordinatensystem des Bahnsteigs zu beschreiben, wenden wir die Lorentztransformation

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad x = \frac{t' V + x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}\,, \quad y = y'\,, \quad z = z'$$

auf die Koordinaten an...

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{v}{c^2} \cdot x_2'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v}{c^2} \cdot x_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{t_2' - t_1' + \frac{v}{c^2} \cdot (x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{V}{c^2} \cdot x_2'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{V}{c^2} \cdot x_1'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{t_2' - t_1' + \frac{V}{c^2} \cdot (x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Analog ergibt sich $\Delta x = \dfrac{\Delta t' \cdot V + \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

und $\Delta y = \Delta y'$ sowie $\Delta z = \Delta z'$.

Damit erhalten wir für den Raumzeitabstand:

$$
\begin{aligned}
\Delta s^2 &= -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \\
&= -c^2 \left(\frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t' \cdot V + \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir für den Raumzeitabstand:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$= -c^2 \left(\frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t' \cdot V + \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= \frac{-c^2 \Delta t'^2 - 2V \Delta t' \Delta x' - \frac{V^2}{c^2} \Delta x'^2 + \Delta t'^2 V^2 + 2V \Delta t' \Delta x' + \Delta x'^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= \frac{\left(-c^2 + V^2\right) \Delta t'^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \Delta x'^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \qquad \square$$

Damit erhalten wir für den Raumzeitabstand:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

$$= -c^2 \left(\frac{\Delta t' + \frac{V}{c^2} \cdot \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta t' \cdot V + \Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right)^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= \frac{-c^2 \Delta t'^2 - 2V \Delta t' \Delta x' - \frac{V^2}{c^2} \Delta x'^2 + \Delta t'^2 V^2 + 2V \Delta t' \Delta x' + \Delta x'^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= \frac{\left(-c^2 + V^2\right) \Delta t'^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \Delta x'^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$

$$= -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 \qquad \square$$

Lorentztransformation lässt 4-dim Raumzeitabstand unverändert!

Weiter geht es in Teil 5 ...