Seien $r, s, i, k \in \mathbb{N}$ und $a_{ik} \in \mathbb{R}$. Eine $r \times s$ Matrix $\mathbf{M}$ ist eine Tabelle mit r Zeilen und s Spalten.

Allgemein: $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix}$ Beispiel einer 3×4 Matrix: $\begin{pmatrix} 5 & 12 & \sqrt{5} & 100 \\ 2 & 0 & \pi & 10^4 \\ 4,6 & \frac{3}{4} & 0,3 & e^2 \end{pmatrix}$

Jeder Vektor aus dem $\mathbb{R}^3$ ist z.B. eine 3×1 Matrix. Eine $r \times s$ Matrix $\mathbf{M}$ kann mit einem Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^s$ multipliziert werden, es gilt:

$$\mathbf{M}\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & a_{r3} & \cdots & a_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3 + \cdots + a_{1s}v_s \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3 + \cdots + a_{2s}v_s \\ a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3 + \cdots + a_{3s}v_s \\ \vdots \\ a_{r1}v_1 + a_{r2}v_2 + a_{r3}v_3 + \cdots + a_{rs}v_s \end{pmatrix}$$

Die Anzahl s der Spalten muss dabei mit der Länge des Vektors übereinstimmen. Das Ergebnis $\mathbf{M}\vec{v}$ ist wieder ein Vektor, allerdings mit der Länge r.

Anwendung: Matrizen werden zum Beispiel bei der Bildbearbeitung am Computer genutzt (Bild drehen, spiegeln, vergrößern, usw). Ein digitales Bild besteht aus vielen einzelnen Bildpunkten. Ein 12 Megapixel Bild hat z.B. 12000000 Bildpunkte.

Wir betrachten als einfaches Modell ein Polygon P (Vieleck) mit den Eckpunkten A_k. Geometrische Objekte können mit einer Matrix M abgebildet werden. Der Vektor vom Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$ zum Punkt A_k soll im Folgenden mit $\vec{a}_k$ bezeichnet werden. Wird der Vektor $\vec{a}_k$ mit einer Matrix M abgebildet so entsteht der Bildvektor $\vec{b}_k = M\vec{a}_k$. Die Vektoren $\vec{b}_k$ gehen dabei vom Koordinatenursprung zu den Bildpunkten B_k. Das Bild $M(P)$ erhält man, indem man die Punkte B_k berechnet und das Polygon mit den Eckpunkten B_k zeichnet.

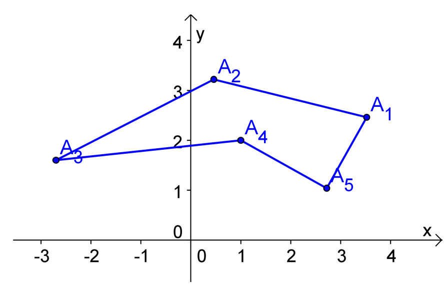

Abbildung 1: Polygon mit 5 Ecken

1. **Aufgabe:**
   (a) Zeichne das Quadrat Q mit den Eckpunkten $A_1(1 \mid 1)$, $A_2(-1 \mid 1)$, $A_3(-1 \mid -1)$ und $A_4(1 \mid -1)$ in ein Koordinatensystem $(1LE = 1cm)$.
   (b) Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
      i. Berechne $M(Q)$ und zeichne das Bild mit in das Koordinatensystem.
      ii. Welche Abbildung wird durch die Matrix M beschrieben ?

2. **Aufgabe:**
   Ein Viereck hat die Eckpunkte $A(0 \mid 3)$, $B(-1 \mid -2)$, $C(1 \mid -2)$ und $D(2 \mid 3)$
   (a) Zeichne das Viereck P in ein Koordinatensystem $(1LE = 1cm)$
   (b) Um welches geometrische Objekt handelt es sich ?
   (c) Sei $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, berechne $M(P)$ und zeichne das Bild mit in das Koordinatensystem.

3. **Aufgabe:**
   Welche Abbildung ist durch $M_3 = 2\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ gegeben?