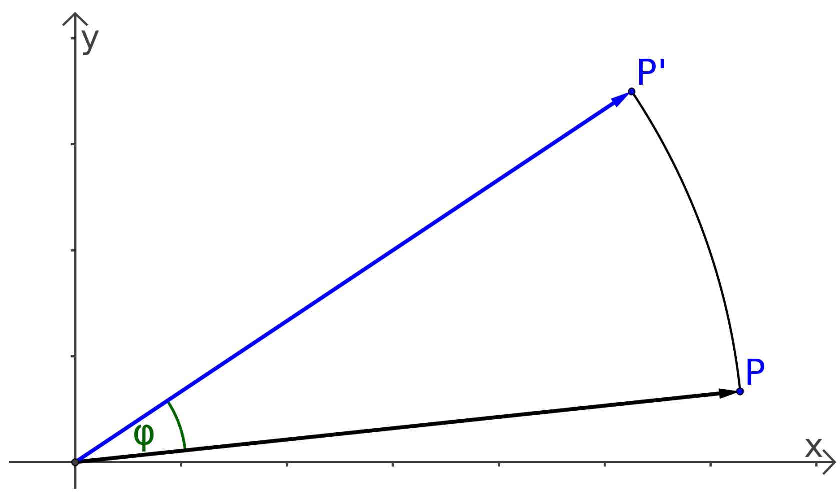
1. **Aufgabe:** (19 Punkte)

Durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{1}$$

wird die Drehung im $\mathbb{R}^2$ beschrieben. Sei $\overrightarrow{0P}$ der Ortsvektor zu einem beliebigen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$, dann wird P auf den Punkt P' abgebildet, wobei $\overrightarrow{0P'} = M\overrightarrow{0P}$, siehe Abbildung:



(a) Leite die Drehmatrix (1) allgemein her. Tipp: Additionstheoreme benutzen !

(b) Beweise, dass für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $\det M = 1$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ und E die $(n \times n)$ −Einheitsmatrix. Die Eigenwerte λ einer $(n \times n)$ −Matrix M sind Lösungen der Gleichung

$$\det(M - \lambda E) = 0 \tag{2}$$

Zeige, dass die Drehmatrix (1) nur dann reelle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ hat, wenn $\varphi = k\pi$.

2. **Aufgabe:** (30 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(a) Der Polyeder mit den Eckpunkten $A(-3 \mid -1 \mid 5)$, $B(1 \mid -1 \mid 0)$, $C(4 \mid 0 \mid 4)$ und $D(0 \mid 6 \mid 0)$ soll mit der Matrix S abgebildet werden. Berechne die Koordinaten der neuen Eckpunkte (nur exakte Ergebnisse, nicht Runden).

(b) Zeige, dass alle Punkte, die auf der zweiten Koordinatenachse liegen, Fixpunkte der Abbildung $g(\vec{x}) = S\vec{x}$ sind.

(c) Berechne die Determinante von S

(d) Um welchen Winkel α wird der Einheitsvektor $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ durch die Abbildung $g(\vec{x}) = S\vec{x}$ gedreht?

(e) Um welche Abbildung könnte es sich bei g handeln?

3. **Aufgabe:** (27 Punkte)

Gegeben ist das Polygon L mit den Eckpunkten $A_1\,(-2 \mid 7)$, $A_2\,(-2 \mid 2)$, $A_3\,(1 \mid 2)$, $A_4\,(1 \mid 3)$, $A_5\,(-1 \mid 3)$ und $A_6\,(-1 \mid 7)$.

(a) Zeichne das Polygon L in ein Koordinatensystem $(1LE = 1cm)$

(b) Das Polygon L soll mit der Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ abgebildet[1] werden. Berechne alle Bildpunkte B_k.

(c) Zeichne das Bild $M(L)$ des Polygons mit in das Koordinatensystem.

(d) Beweise:

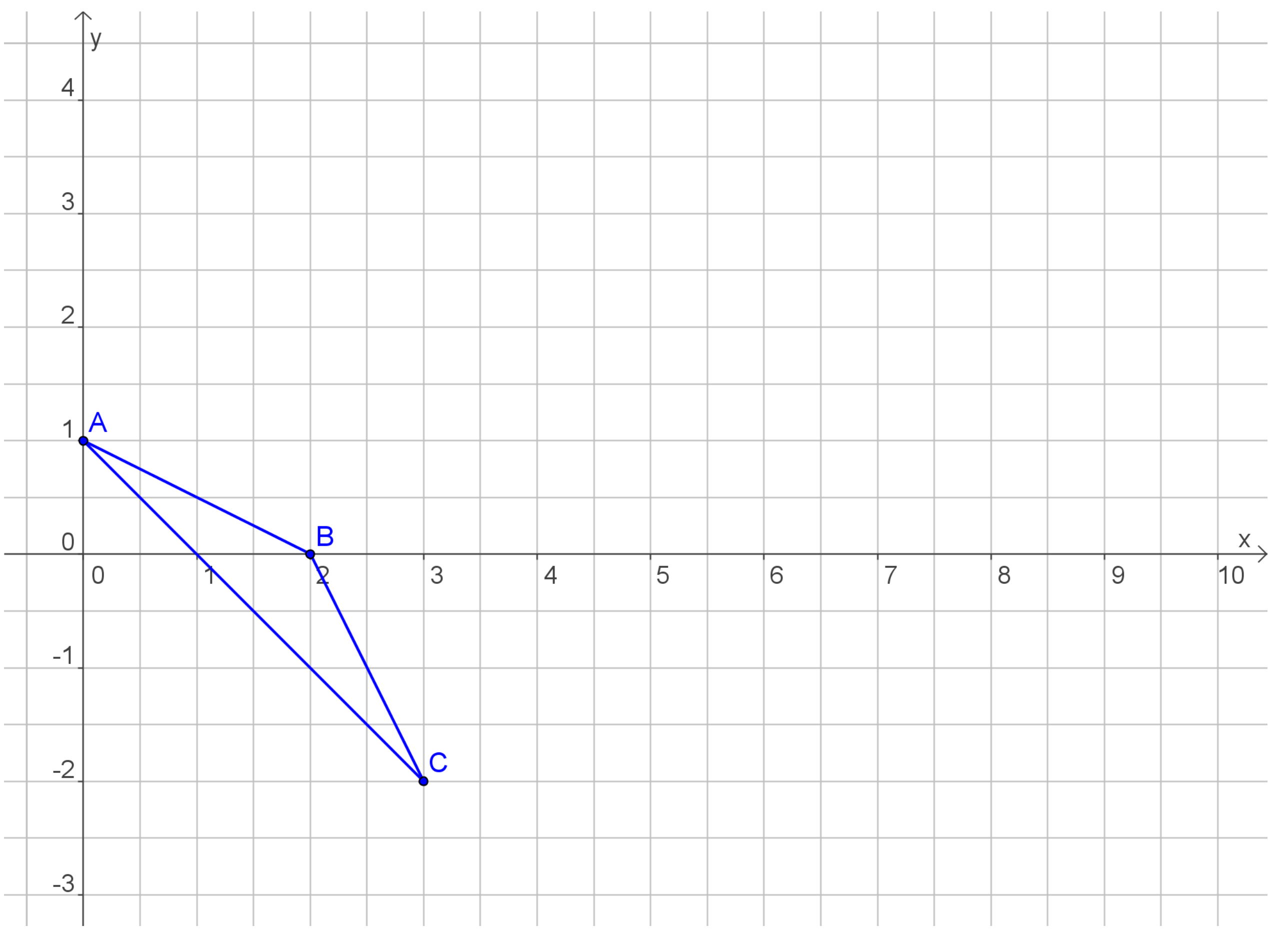
i. Die Abbildung M kann aus der 270° Drehung $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Stauchung $M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ zusammengesetzt werden.

ii. Es ist egal, in welcher Reihenfolge die beiden Abbildungen M_1 und M_2 angewandt werden.

(e) Gilt die Vertauschbarkeit $CD = DC$ für beliebige Matrizen C und D? (Beweis oder Gegenbeispiel)

4. **Aufgabe:** (15 Punkte)

Gegeben ist die Abbildung $f\,(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und das Dreieck mit den Eckpunkten A , B und C:



(a) Berechne die Bildpunkte des Dreiecks unter der Abbildung f

(b) Zeichne das Bild in das Koordinatensystem wenn möglich.

(c) Berechne einen Fixpunkt der Abbildung f

[1] Abbilden eines Polygons P mit den Eckpunkten A_k: Der Vektor vom Koordinatenursprung $(0 \mid 0)$ zum Punkt A_k soll im Folgenden mit $\vec{a}_k$ bezeichnet werden. Wird der Vektor $\vec{a}_k$ mit einer Matrix M abgebildet so entsteht der Bildvektor $\vec{b}_k = M\vec{a}_k$. Die Vektoren $\vec{b}_k$ gehen dabei vom Koordinatenursprung zu den Bildpunkten B_k. Das Bild $M(P)$ erhält man , indem man die Bildpunkte B_k berechnet.