Einige Funktionen lassen sich nicht durch eine Funktionsgleichung in der Form $y = f(x)$ dargestellen. Eine weitere Möglichkeit bietet die Darstellung in **Parameterform** wobei die Punkte $P(x \mid y)$ welche auf dem Graph der Funktion liegen durch Gleichungen $x = x(t)$ und $y = y(t)$ berechnet werden können. Die Variable t nennt man dabei auch Parameter. Die Funktion soll im Folgenden mit $\vec{r} = \vec{r}(t)$ bezeichnet werden.

Beispiel:

Gegeben ist die Funktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Für $t \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ erhält man die folgende Wertetabelle:

t	-1	0	1	2	3
$x(t) = t^2$	1	0	1	4	9
$y(t) = t^3$	-1	0	1	8	27

Die Punkte $(1 \mid -1)$, $(0 \mid 0)$, $(1 \mid 1)$, $(4 \mid 8)$ und $(9 \mid 27)$ liegen also auf der Kurve.

1. **Aufgabe:**
   Gegeben sind die folgenden Funktionen $\vec{r}(t)$ in Parameterdarstellung. Erstelle eine geeignete Wertetabelle und zeichne die Funktionen jeweils in ein Koordinatensystem.

   (a) $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}_4(t) = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$

   (b) $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{u}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

   (c) Zeichne $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Vektoren $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   in ein gemeinsames Koordinatensystem

2. **Aufgabe:**
   Betrachten wir wieder die Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, siehe oben.

   (a) Berechne die Ableitung $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ und zeichne sie zusammen mit der Kurve $\vec{r}$ in ein Koordinatensystem.

   (b) Berechne $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|$.

3. **Aufgabe:**
   Durch $\vec{r}_K(\phi) = (R\cos\phi \mid R\sin\phi \mid 0)$ wird der Rand eines Kreises mit Radius R in der $x, y-$Ebene im $\mathbb{R}^3$ beschrieben.

   (a) Welche Parametergleichung beschreibt eine Schraubenlinie mit Ganghöhe h und Radius R um die $z-$Achse?

   (b) Berechne $\dfrac{d\vec{r}}{d\phi}$ und $\left|\frac{d\vec{r}}{d\phi}\right|$ für Schraubenlinie und den Kreisrand $\vec{r}_K$.

   (c) Berechne $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|\frac{d\vec{r}_K}{d\phi}\right| d\phi$.

4. **Aufgabe:**
   Gegeben sei ein Kreis mit Radius R, dessen Mittelpunkt sich zu Anfang im Punkt $(0 \mid R)$ befindet. Sei P der Punkt auf dem Kreisrand, der sich anfangs im Koordinatenursprung befindet. Der Kreis rollt nun entlang der positiven $x-$Achse.

   (a) Bestimme die Parametergleichung der Kurve $\vec{r}_P(t)$, entlang sich der Punkt P dabei bewegt.

   (b) Berechne die Länge der Kurve vom Ursprung bis sich der Punkt P zum nächsten mal wieder auf der $x-$Achse befindet.