Sei $\vec{B}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ein hinreichend oft stetig differenzierbares Vektorfeld mit den Komponenten b_i. Die Divergenz von $\vec{V}$ ist definiert als

$$\operatorname{div}\left(\vec{B}\right):=\left\langle\vec{\nabla},\vec{B}\right\rangle=\partial_x b_1+\partial_y b_2+\partial_z b_3$$

wobei wieder $\partial_x f:=\frac{\partial f}{\partial x}$ usw. Die Divergenz von Vektorfeldern lässt sich analog im $\mathbb{R}^n$ definieren.

“*Interpretiert man das Vektorfeld als Strömungsfeld einer Größe, für die die Kontinuitätsgleichung gilt, dann ist die Divergenz die Quelldichte. Senken haben negative Divergenz. Ist die Divergenz überall gleich null, so bezeichnet man das Feld als quellenfrei*[1].“

Die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{H}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ mit den Komponenten h_i ist definiert als:

$$\operatorname{rot}\left(\vec{H}\right):=\begin{pmatrix}\partial_x\\\partial_y\\\partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\partial_y h_3-\partial_z h_2\\\partial_z h_1-\partial_x h_3\\\partial_x h_2-\partial_y h_1\end{pmatrix}\tag{1}$$

”*Ein Vektorfeld, dessen Rotation in einem Gebiet überall gleich null ist, nennt man wirbelfrei*[2].”

1. **Aufgabe:**
   Berechne jeweils die Divergenz und entscheide ob das Feld Quellenfrei ist:
   (i) $\vec{V}(x,y,z)=\left(2xy\mid x^2-yz\mid e^{-z}\right)^\top$ (ii) $\vec{V}(x,y,z)=\left(1+4xyz\mid y^2z+z^4\mid\sqrt{x}-3yz^2\right)^\top$

2. **Aufgabe:**
   Nach Definition des Skalarprodukts $\vec{a}\circ\vec{b}=ab\cos\varphi$ sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ genau dann senkrecht (orthogonal), wenn das Skalarprodukt Null wird, also $\vec{a}\perp\vec{b}\iff\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=0$. Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$. Das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ ist gegeben durch

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-b_2a_3\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}\tag{2}$$

   Beweise, dass das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.

3. **Aufgabe:**
   (a) Berechne die Rotation der Vektorfelder aus Aufgabe 1.
   (b) Das Gravitationsfeld einer Gravitationsquelle (Punktmasse M) im Koordinatenursprung ist gegeben durch:

$$\vec{F}=-\gamma\frac{Mm}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=-\gamma\frac{Mm}{r^3}\cdot\vec{r}$$

   wobei $\vec{r}=(x\mid y\mid z)^\top$.
      i. Entscheide rechnerisch ob das Gravitationsfeld wirbelfrei ist.
      ii. Zeige, dass das Gravitationsfeld nicht quellenfrei ist.
   (c) Das Gravitationspotential ist gegeben durch die Funktion $\mathbf{\Phi}(r)=-\frac{\gamma M}{r}$. Berechne den Gradienten $\vec{\nabla}\mathbf{\Phi}$.

4. **Aufgabe:**
   (a) Berechne die Rotation des Gradienten $\vec{\nabla}f$ einer beliebigen stetig differenzierbaren Funktion $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$.
   (b) Berechne die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{A}=\operatorname{rot}\left(\vec{H}\right)$, siehe (1).

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Divergenz_eines_Vektorfeldes
[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Rotation_eines_Vektorfeldes