1. **Aufgabe:**
Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hinreichend oft stetig differnzierbare Funktionen. Für den Gradienten gilt folgende Produktregel:
$$\vec{\nabla}(fg) = g\vec{\nabla}f + f\vec{\nabla}g$$
Beweise die Produktregel.

2. **Aufgabe:**
Gegeben sei eine sphärische Masseverteilung der Masse M mit Radius R, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt. Außerhalb der Massenverteilung sei der Raum leer. Das Gravitationspotential ist dann:
$$\mathbf{\Phi}(r) = -\frac{\gamma M}{r} \tag{1}$$
   (a) Berechne mit $\vec{F} = -m\vec{\nabla}\mathbf{\Phi}$ die Gravitationskraft aus (1).
   (b) Begründe, dass das Gravitationsfeld $\vec{F}$ rotationsfrei ist.
   (c) Für das elektrische Feld einer Punktladung Q gilt $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$. Berechne $\vec{\nabla} \times \vec{E}$.

3. **Aufgabe:**
Das Vektorfeld
$$\vec{v}(x, y, z) = (-\omega y \mid \omega x \mid 0)^\top$$
gibt an jedem Punkt einer rotierenden Scheibe die Geschwindigkeit an. Berechne die Rotation von $\vec{v}$.

4. **Aufgabe:**
Sei $\vec{r} = (x \mid y \mid z)^\top$ und $r = |\vec{r}|$.
   (a) Zeige $\vec{\nabla}\left[r^{-5}\right] = -\frac{5\vec{r}}{r^7}$ und dass allgemein für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\vec{\nabla}\left[r^{-n}\right] = -\frac{n\vec{r}}{r^{n+2}}$.
   (b) Das magnetische Skalarpotential eines Dipols ist gegeben durch
$$\psi = \frac{1}{4\pi}\frac{\langle \vec{m}, \vec{r} \rangle}{r^3} \tag{2}$$
   wobei $\vec{m} = (m_1 \mid m_2 \mid m_3)^\top$ sein magnetisches Dipolmoment ist. Berechne aus *(2)* die magnetischen Feldstärke $\vec{H} = -\vec{\nabla}\psi$. Für die magnetischen Flussdichte gilt übrigens $\vec{B} = \mu\vec{H}$ und damit $\vec{B} = -\mu\vec{\nabla}\psi$ (vergleiche Struktur von $\vec{F}$, Aufgabe (2a)).
   (c) Die magnetische Flussdichte eines magnetischen Dipols (in größerer Entfernung r zum Dipol) ist gegeben durch
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r}\langle \vec{m}, \vec{r} \rangle - \vec{m}r^2}{r^5}. \tag{3}$$
      i. Beweise[1], dass das Feld eines magnetischen Dipols (3) quellenfrei ist, also dass $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{B} \right\rangle = 0$.
      ii. Aufgrund der Quellenfreiheit von $\vec{B}$ gibt es ein Vektorfeld $\vec{A}$ mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Das magnetische Vektorpotential ist gegeben durch
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$
      Berechne $\vec{\nabla} \times \vec{A}$.

[1] Hinweis: Produktregel $\left\langle \vec{\nabla}, f\vec{A} \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla}f, \vec{A} \right\rangle + f\left\langle \vec{\nabla}, \vec{A} \right\rangle$ benutzen.