Definition Trägheitsmoment:
Das Trägheitsmoment J eines Körpers der Masse M bezüglich einer Drehachse $\mathcal{D}$ lässt sich durch

$$J_{\mathcal{D}} = \int_M r_\perp^2 \, dm \tag{1}$$

berechnen. Die Verteilung der Masse M ist vom Ort $(x \mid y \mid z)$ bzw. vom Ortsvektor $\vec{r} = (x \mid y \mid z)^\top$ abhängig. Durch $r_\perp$ wird der Abstand eines Massepunktes im Ort $\vec{r}$ zur **Drehachse** $\mathcal{D}$ bezeichnet[1]. Wegen $m = \rho V$ ergibt sich für Körper mit konstanter Dichte $dm = \rho\, dV$ und aus (1) folgt $J_{\mathcal{D}} = \rho \int_V r_\perp^2 dV$ wobei V das Volumen des Körpers ist.

Rotation eines Körpers konstanter Dichte um die $z-$Achse:
Rotiert ein Körper um die $z-$Achse, so hat ein Massepunkt an der Stelle $(x \mid y \mid z)$ den Abstand $r_\perp = \sqrt{x^2+y^2}$ zur Drehachse. Aus (1) ergibt sich für das Trägheitsmoment eines Körpers konstanter Dichte

$$J_z = \rho \int_V \left(x^2+y^2\right) dx\, dy\, dz. \tag{2}$$

Analog lassen sich Formeln für die Rotation um die anderen Koordinatenachsen aufstellen[2].

1. **Aufgabe:**
   Gegeben ist ein Quader der Masse M mit den Kantenlängen a, b und c, dessen Schwerpunkt sich im Koordinatenursprung befindet. Die Seitenflächen mit den Kanten a und b sollen parallel zur $x, y-$Ebene liegen, die Kante c also parallel zur $z-$Achse sein. Die Dichte $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{abc}$ des Quaders sei konstant.
   (a) Zeige mit (2), dass sich bei Rotation um die $z-$Achse ein Trägheitsmoment von $J_z = \frac{1}{12} M \left(a^2+b^2\right)$.
   (b) Berechne die Trägheitsmomente J_x und J_y.

2. **Aufgabe:**
   Berechne das Trägheitsmoment einer Kugel der Masse M und Radius R mit konstanter Dichte bei Rotation um eine Achse, welche durch ihren Schwerpunkt verläuft. *Hinweis: Transformation in Kugelkoordinaten durch* $(x,y,z)^\top = \vec{\psi}(r,\phi,\theta) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)^\top$, *es gilt* $\left|\det\left(D\vec{\psi}\right)\right| = r^2\sin\theta$.

3. **Aufgabe:**
   Gegeben sei ein Vollzylinder konstanter Dichte mit Radius R und Höhe H.
   (a) Berechne das Trägheitsmoment bei Rotation des Zylinders um seine Symmetrieachse. Wir können dazu annehmen, dass die Symmetrieachse des Zylinders auf der $z-$Achse liegt.
   (b) Berechne das Trägheitsmoment des Zylinders bei Rotation um eine zur Symmetrieachse senkrechten Drechachse, welche durch den Schwerpunkt verläuft. Wenn die Symmetrieachse des Zylinders wieder auf der $z-$Achse liegt und der Koordinatenursprung dabei auf halber Höhe des Zylinders, könnte die Rotation z.B. um die $x-$Achse erfolgen.

4. **Aufgabe:**
   Gegeben sei ein Torus der Masse M mit konstanter Dichte, der um seine Symmetrieachse rotiert. Wählt man die $z-$Achse als Drehachse, kann der Torus durch $\vec{\psi}(r,\phi,\theta) = \left([R+r\cos\theta]\cos\phi,\ [R+r\cos\theta]\sin\phi,\ r\sin\theta\right)^\top$ parametrisiert werden. Beide Winkel laufen von 0 bis 2π, r von 0 bis zum Querschnittsradius (kleiner Radius). Berechne das Trägheitsmoment J_z.
   Hinweise: Es ist $\left|\det\left(D\vec{\psi}\right)\right| = r\left(R+r\cos\theta\right)$. *Außerdem ist folgendes unbestimmtes Intergal gegeben:*

$$\int \left(R+r\cos\theta\right)^3 d\theta = \frac{3}{2}Rr^2\left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)+\theta\right) + r^3\left(\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin^3(\theta)\right) + 3R^2 r\sin(\theta) + R^3\theta \tag{3}$$

[1] *Hinweis:* $r_\perp$ **nicht** mit dem Abstand zum Koordinatenursprung $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ verwechseln!
[2] Bei Rotation um die $x-$ bzw. $y-$Achse ist $J_x = \rho\int_V \left(y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz$ und $J_y = \rho\int_V \left(x^2+z^2\right) dx\, dy\, dz$.