Das Differential einer (total differenzierbaren) Funktion $f(t_1, \dots, t_n)$ ist definiert durch:

$$df = \frac{\partial f}{\partial t_1} dt_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_n} dt_n$$

*Beispiel* 1: Sei $f(x,y) = 5x^2y^4 + \sqrt{x}$ dann ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 10xy^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 20x^2y^3$ und damit

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(10xy^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx + 20x^2y^3\, dy$$

*Beispiel* 2: Sei $w(r,\alpha,\phi) = \alpha^3 + r^2 \sin(\phi)$ dann ist $\frac{\partial w}{\partial r} = 2r\sin\phi$ , $\frac{\partial w}{\partial \alpha} = 3\alpha^2$ und $\frac{\partial w}{\partial \phi} = r^2\cos\phi$ und damit

$$dw = \frac{\partial w}{\partial r} dr + \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial w}{\partial \phi} d\phi = 2r\sin(\phi)\; dr + 3\alpha^2\, d\alpha + r^2\cos(\phi)\; d\phi$$

1. **Aufgabe:**

   (a) Sei $f(t,x) = t^2x - x\sin(t)$, berechne $df$

   (b) Mit der Transformation

   $$x(r,\phi) = r\cos\phi \qquad y(r,\phi) = r\sin\phi$$

   lässt sich der $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten beschreiben.

   i. Berechne die Differentiale $dx$ und $dy$

   ii. Wende die Ergebnisse auf die Metrik $ds^2 = dx^2 + dy^2$ an. *Hinweis*: Die Identität $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ benutzen!

2. **Aufgabe:**

   (a) Die **Oberfläche** der Kugel mit Radius $R$ lässt sich durch die Koordinaten

   $$x(\theta,\phi) = R\sin\theta\cos\phi \qquad y(\theta,\phi) = R\sin\theta\sin\phi \qquad z(\theta,\phi) = R\cos\theta$$

   beschreiben. $R$ ist hier eine Konstante!

   i. Berechne die Differentiale $dx$, $dy$ und $dz$

   ii. Was folgt daraus für $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ?

3. **Aufgabe:**
   Will man nun den ganzen $\mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten beschreiben, ist der Abstand $r$ vom Ursprung nun auch eine Variable. Die Transformation ist dann gegeben durch

   $$x(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi \qquad y(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi \qquad z(r,\theta,\phi) = r\cos\theta$$

   Berechne wieder die Differentiale $dx$, $dy$ und $dz$ sowie $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.