Eine $m-$Form ω_m lässt sich über eine kompakte[1] $m-$dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ integrieren. Der Rand der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ wird mit $\partial\mathcal{M}$ bezeichnet. Der Integralsatz von Stokes in der allgemeinen Form ist:

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega \tag{1}$$

Mehrfachintegrale, die bei der Integration auftreten, werden hier durch ein einzelnes Integralzeichen symbolisiert.

1. **Aufgabe:**
   Im $\mathbb{R}^3$ ergeben sich aus (1) zwei Integralsätze. Seien $\overrightarrow{H}, \overrightarrow{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Abbildungen. Einen Kreis im Integral bedeutet, dass über eine geschlossene Kurve oder Fläche integriert wird.

   (a) Sei nun $\mathcal{M}_2$ eine kompakte Fläche im $\mathbb{R}^3$ (z.B. eine Kreisfläche), dann ist ihr Rand $\partial\mathcal{M}_2$ eine geschlossene Kurve (im Beispiel dann der Kreisrand). Eine $1-$Form ω_1 lässt sich über den eindimensionalen Rand $\partial\mathcal{M}_2$ integrieren. Das Differential $d\omega_1$ ist eine $2-$Form und lässt sich über die zweidimensionale Fläche $\mathcal{M}_2$ integrieren. Zeige, dass sich aus (1) dann folgender Integralsatz[2] ergibt:

   $$\oint_{\partial\mathcal{M}_2} \left\langle \overrightarrow{H}, d\overrightarrow{r} \right\rangle = \int_{\mathcal{M}_2} \left\langle \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}, d\overrightarrow{A} \right\rangle \tag{2}$$

   (b) Sei $\mathcal{M}_3$ ein Kompaktum im $\mathbb{R}^3$ (z.B. eine Kugel). Der Rand $\partial\mathcal{M}_3$ ist dann eine geschlossene zweidimensionale Fläche (im Beispiel die Kugeloberfläche). Die $2-$Form ω_2 kann also über $\partial\mathcal{M}_3$ integriert werden, und die $3-$Form $d\omega_2$ kann über $\mathcal{M}_3$ integriert werden. Zeige, dass sich aus (1) folgender Integralsatz[3] ergibt:

   $$\oint_{\partial\mathcal{M}_3} \left\langle \overrightarrow{B}, d\overrightarrow{A} \right\rangle = \int_{\mathcal{M}_3} \left\langle \overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{B} \right\rangle dV \tag{3}$$

   (c) Im $\mathbb{R}^2$ folgt aus den Regeln für Differentialformen ein Integralsatz für $1-$Formen aus (1). Sei $\overrightarrow{h}$ eine differenzierbare Abbildung $\overrightarrow{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, stelle den Integralsatz auf.

   (d) Sei $I = [a, b]$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Der Rand des Intervalls ∂I besteht aus den "Ecken" a und b. Wie lässt sich die Formel $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ aus dem Hauptsatz der Integralrechnung auf den Satz von Stokes (1) zurückführen?

2. **Aufgabe:**
   Gegeben sei das Vektorfeld $\overrightarrow{F} = \left(x^3, y^3, z^3\right)$ und die Kugel $K_3 = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\right\}$.

   (a) Berechne $\operatorname{div}\overrightarrow{F} = \left\langle \overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{F} \right\rangle$ und integriere $\operatorname{div}\overrightarrow{F}$ über die Kugel K_3.
   Hinweis: Das zu berechnende Integral ist $\int_{K_3} \left\langle \overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{F} \right\rangle dV$.

   (b) Integriere das Vektorfeld $\overrightarrow{F}$ über den Rand der Kugel ∂K_3.
   Hinweis: Anwenden von Gleichung (3) bei Aufgabenteil ergibt $\oint_{\partial K_3} \left\langle \overrightarrow{F}, d\overrightarrow{A} \right\rangle$.

3. **Aufgabe:** (Unterschiedliche Notationen beachten)

   (a) Sei A eine geschlossene Fläche. Diese sei der Rand $\partial\mathcal{M}_3$ einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_3$. Für den magnetischen Fluss gilt $\operatorname{div}\overrightarrow{B} = 0$. Zeige mit (1), dass der magnetische Fluss durch eine geschlossene Fläche A immer Null ergibt, also $\displaystyle\oint_A \overrightarrow{B} \circ d\overrightarrow{A} = 0$.

   (b) Zeitliche sich ändernde Magnetfelder erzeugen ein elektrisches Feld, es gilt $\operatorname{rot}\overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$. Sei s ein geschlossener Weg. Dieser sei der Rand $\partial\mathcal{M}_2$ einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}_2$. Leite mit (1) das Faradaysche Induktionsgesetz $\displaystyle\oint_s \overrightarrow{E} \circ d\overrightarrow{r} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \overrightarrow{B} \circ d\overrightarrow{A}$ her.

[1] Eine abgeschlosse und beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ nennt man kompakt.

[2] Benutzt man bei der Schreibweise Mehrfachintegrale, wird Gleichung (2) zu $\oint_{\partial\mathcal{M}_2} \left\langle \overrightarrow{H}, d\overrightarrow{r} \right\rangle = \iint_{\mathcal{M}_2} \left\langle \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{H}, d\overrightarrow{A} \right\rangle$.

[3] Mit Mehrfachintegralen wird (3) zu $\oiint_{\partial\mathcal{M}_3} \left\langle \overrightarrow{B}, d\overrightarrow{A} \right\rangle = \iiint_{\mathcal{M}_3} \left\langle \overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{B} \right\rangle dV$.