Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Außerdem seien $\vec{A}, \vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ hinreichend oft stetig differenzierbare Vektorfelder, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sowie $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ hinreichend oft stetig differenzierbare Funktionen.

1. **Aufgabe:** (Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt)
   Beweise die folgenden Identitäten:
   (a) Das Vektorprodukt ist bilinear, d.h. für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt
   $$\vec{a} \times \left(\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}\right) = \lambda \vec{a} \times \vec{b} + \mu \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{und} \quad \left(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}\right) \times \vec{c} = \lambda \vec{a} \times \vec{c} + \mu \vec{b} \times \vec{c}.$$
   (b) Das Vektorprodukt ist antikommutativ, d.h. es ist $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Außerdem gilt $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.
   (c) Die zyklische Summe von drei Kreuzprodukten verschwindet (Jacobi-Identität):
   $$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0$$
   (d) Beweise die BAC-CAB-Formel (Graßmann-Identität):
   $$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle - \vec{c} \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle$$

2. **Aufgabe:** (Rotation)
   (a) Beweise, dass die Rotation linear ist, also $\vec{\nabla} \times \left(\lambda \vec{A} + \vec{B}\right) = \lambda \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{B}$.
   (b) Zeige $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$ und $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} \times \vec{A} \right\rangle = 0$ (rot grad $f = 0$ und div rot $\vec{A} = 0$).
   (c) Beweise die Produktregel[1] $\vec{\nabla} \times \left(f \vec{A}\right) = \vec{\nabla} f \times \vec{A} + f \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}$.
   (d) Zeige $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \vec{\nabla} \left\langle \vec{\nabla}, \vec{A} \right\rangle - \Delta \vec{A}$.

3. **Aufgabe:** (Divergenz)
   (a) Zeige, dass die Divergenz linear ist, also $\left\langle \vec{\nabla}, \lambda \vec{A} + \vec{B} \right\rangle = \lambda \left\langle \vec{\nabla}, \vec{A} \right\rangle + \left\langle \vec{\nabla}, \vec{B} \right\rangle$.
   (b) Beweise die Produktregel $\left\langle \vec{\nabla}, f \vec{A} \right\rangle = \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{A} \right\rangle + f \left\langle \vec{\nabla}, \vec{A} \right\rangle$.
   (c) Beweise $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{A} \times \vec{B} \right\rangle = \left\langle \vec{B}, \vec{\nabla} \times \vec{A} \right\rangle - \left\langle \vec{A}, \vec{\nabla} \times \vec{B} \right\rangle$.
   (d) Zeige $\left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g \right\rangle = 0$

4. **Aufgabe:** (Laplace Operator)
   Für den Laplace-Operator gilt $\Delta f = \left\langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f \right\rangle$.
   (a) Zeige, dass der Laplace Operator linear ist, also $\Delta (\lambda f + \mu g) = \lambda \Delta f + \mu \Delta g$.
   (b) Beweise die Produktregel $\Delta (fg) = g \, \Delta f + 2 \left\langle \vec{\nabla} f, \vec{\nabla} g \right\rangle + f \, \Delta g$

[1] Hinweis: Es lässt sich übrigens auch eine Produktregel für $\vec{\nabla} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)$ berechnen.