Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine hinreichend oft stetig differnzierbare Funktion. Der Gradient $\vec{\nabla}:=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)^\top$ angewandt auf eine Funktion f, also $\vec{\nabla}f$ oder kurz ∇f, ergibt einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ definiert als

$$\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix}\quad\text{oder kurz}\quad\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}f_x\\ f_y\end{pmatrix}$$

wobei $\partial_x f:=\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\partial_y f:=\frac{\partial f}{\partial y}$. Die Hessematrix bestet aus den zweiten Ableitungen der Funktion:

$$H_f=\begin{pmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\ f_{yx}&f_{yy}\end{pmatrix}$$

Das Konzept lässt sich analog auf Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ übertragen. Mit $\partial_k f:=\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ hat man:

$$\vec{\nabla}f=\begin{pmatrix}\partial_1 f\\ \vdots\\ \partial_n f\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad H_f=\begin{pmatrix}f_{11}&\cdots&f_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ f_{n1}&\cdots&f_{nn}\end{pmatrix}$$

1. **Aufgabe:**
   Berechne jeweils den Gradienten der Funktion und die Hessematrix:
   (a) (i) $f(x,y)=9-x^2-y^2$ (ii) $g(x,y)=9-x^2+y^2$ (iii) $h(x,y)=(2x+5y)\,e^{-x^2-y^2}$
   (b) Ermittle jeweils die Menge N der Punkte $(x\mid y)$, an denen die Funktion die $x,y-$Ebene schneidet. Zeichne die Menge N als Funktionsgraph.
   (c) Berechne für 1ai) und 1aii) jeweils die Nullstellen der Gradienten und die Hessematrix an dieser Stelle. Um welche Art von kritischen Punkten[1] (Extrem- und Sattelstellen) handelt es sich jeweils?

2. **Aufgabe:**
   Seien $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$ Vektoren mit den Komponenten $a_k\in\mathbb{R}$ sowie $b_k\in\mathbb{R}$. Die Rechenoperation $\langle\ ,\ \rangle$ für die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als
   $$\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$
   Als Schreibweise wird oft auch einfach $\vec{a}\circ\vec{b}$ benutzt. Die Ableitung einer Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ an der Stelle $\vec{x}$ in Richtung eines Vektors $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ ist definiert als
   $$D_{\vec{v}}f(\vec{x}):=\left\langle\vec{\nabla}f(\vec{x}),\vec{v}\right\rangle$$
   (a) Beweise, dass $\langle\ ,\ \rangle$ eine symmetrische Bilinearform[2] ist.
   (b) Berechne die Ableitung der Funktion h aus 1aiii) an der Stelle $(3\mid -4)$ in Richtung $\vec{v}=(6\mid 7)^\top$.
   (c) Sei $\vec{e_k}=(0\mid\cdots\mid 0\mid 1\mid 0\mid\cdots\mid 0)^\top$ der $k-$te Einheitsvektor, zeige $D_{\vec{e}_k}f=\partial_k f$.
   (d) Sei $f(x,y,z)=e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Berechne $\vec{\nabla}f$ sowie die Steigung an der Stelle $(2\mid -6\mid 3)$ in Richtung $\vec{v}=(4\mid 1\mid -5)^\top$.

3. **Aufgabe:**
   Im Folgenden sei $\vec{r}:=(x,y,z)^\top$, $r:=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Sei f eine differenzierbare Funktion, die nur vom Abstand r abhängt. D.h. $f=f(r)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.
   (a) Beweise, dass bei radialsymmetrischen Funktionen gilt: $\vec{\nabla}f(r)=f'(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$. Berechne damit nochmal 2d.
   (b) Beweise: Für den Laplace Operator (Summe der zweiten Ableitungen) $\Delta f(r):=\left\langle\vec{\nabla},\vec{\nabla}f\right\rangle$ gilt bei radialsymmetrischen Funktionen $\Delta f(r)=f''(r)+f'(r)\cdot\frac{2}{r}$.

[1] Siehe z.B: https://de.wikipedia.org/wiki/Hesse-Matrix
[2] Sei $k\in\mathbb{R}$ und $\vec{a},\vec{b},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$. Zu zeigen ist $\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\left\langle\vec{b},\vec{a}\right\rangle$, sowie $\left\langle\vec{a},k\vec{b}\right\rangle=k\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle$ und $\langle\vec{a},\vec{v}+\vec{w}\rangle=\langle\vec{a},\vec{v}\rangle+\langle\vec{a},\vec{w}\rangle$.