Beispiel: Die Funktion $f(x,y) = xye^{-x^2}$ soll über die rechteckige Menge $M_\square = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3\}$ integriert werden, gesucht ist also $\int_{M_\square} f\,dx\,dy$. Es ergibt sich:

$$\int_0^3 \int_0^2 xye^{-x^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \left[-\frac{1}{2}ye^{-x^2}\right]_0^2 dy = \int_0^3 \left(-\frac{1}{2}ye^{-4} + \frac{1}{2}y\right) dy = \left[-\frac{1}{4}y^2e^{-4} + \frac{1}{4}y^2\right]_0^3 = -\frac{9}{4}e^{-4} + \frac{9}{4}$$

1. **Aufgabe:**

   (a) Sei $f(x,y) = x^2y + y$. Berechne $\int_M f\,dx\,dy$ mit $M = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 3\}$.

   (b) Berechne $\int_W x^2y^3z^4\,dx\,dy\,dz$ wobei $W = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$ ein Würfel ist.

2. **Aufgabe:** (Polarkoordinaten)
   Sei $f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$. f soll nun zunächst über den Einheitskreis $B_1 = \{(x \mid y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ integriert werden. Die Integration $\int_{M_\bigcirc} f\,dx\,dy$ lässt sich durch Transformation in ein geeignetes Koordinatensystem, hier Polarkoordinaten, durchführen. Die Transformation ist $\vec{\psi}(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)^\top$.

   (a) Zeige, dass $f\left(\vec{\psi}\right) = f(r\cos\phi, r\sin\phi) = 25 - r^2$ ergibt.

   (b) Das Flächenelement $dx\,dy$ lässt sich mit Hilfe der Jakobimatrix $D\vec{\psi} = \left(\frac{\partial\vec{\psi}}{\partial r}, \frac{\partial\vec{\psi}}{\partial\phi}\right)$ transformieren.
   Bei der Transformation wird $dx\,dy$ zu $\left|\det\left(D\vec{\psi}\right)\right| dr\,d\phi$. Zeige, dass für Polarkoordinaten $\left|\det\left(D\vec{\psi}\right)\right| = r$.

   (c) Bei Integration über den Einheitskreis läuft die Radialkoordinate r von 0 bis 1 und die Winkelkoordinate ϕ von 0 bis 2π. Berechne für die oben angegebene Funktion f das Integral

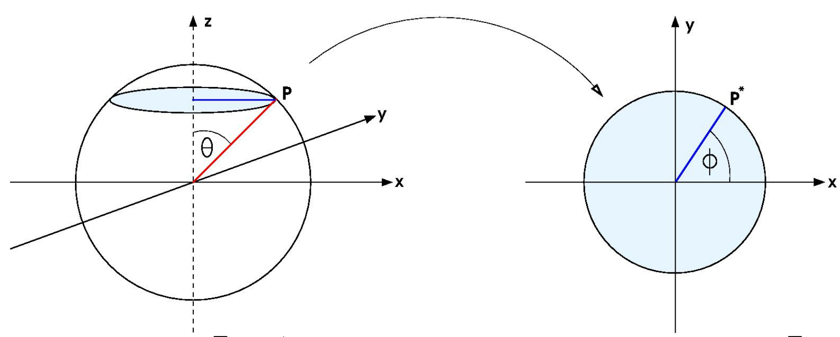
   $$\int_{B_1} f\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 f\left(\vec{\psi}\right)\left|\det\left(D\vec{\psi}\right)\right| dr\,d\phi.$$

   (d) Ermittle die Nullstellenmenge N_0 von f und berechne das Volumen, dass f mit der $x,y-$Ebene einschließt.

   (e) Sei $f(x,y) = 1$. Integriert man 1 über den Kreis mit Radius R, also $B_R = \{(x \mid y) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$ so ergibt sich anschaulich ein Zylinder mit Höhe $H = 1$. Berechne das Volumen des Zylinders $\int_{B_R} 1\,dx\,dy$ durch Transformation in Poolarkoodinaten. *Hinweis:* Wegen der Höhe Eins hat man damit auch die Größe der Grundfläche ausgerechnet.

   (f) Durch $p(x,y) = H - a\left(x^2 + y^2\right)$ ist ein Paraboloid der Höhe H gegeben. Bestimme a so dass B_R die Nullstellenmenge von p ist und berechne das Volumen des Paraboloids.

3. **Aufgabe:** (Kugelkoordinaten)
   Sei $P \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit den Koordinaten $P(x,y,z)$, dann gibt r den Abstand zum Koordinatenursprung und θ den Winkel zwischen der $z-$Achse und dem Vektor $\overrightarrow{0P}$ an. Sei P^* die orthogonale Projektion des Punktes P auf die $x,y-$Ebene, d.h. $P^*(x,y,0)$, dann ist ϕ der Winkel zwischen der $x-$Achse und dem Vektor $\overrightarrow{0P^*}$.

   Die Transformation ist gegeben durch $(x,y,z)^\top = \vec{\psi}(r,\phi,\theta) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)^\top$. Berechne[1] das Volumen einer Kugel mit Radius R durch Integration der Funktion $f = 1$ über $B_R = \{(x \mid y) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R\}$.

4. **Aufgabe:** (Torus)
   Durch $\vec{\psi}(r,\phi,\theta) = ([R \pm r\cos\theta]\cos\phi,\ [R \pm r\cos\theta]\sin\phi,\ r\sin\theta)^\top$ lässt sich ein Torus parametrisieren (+ oder − wählen). Beide Winkel laufen von 0 bis 2π, r von 0 bis zum Querschnittsradius. Berechne das Volumen.

[1] Zeige zunächst $\left|\det\left(D\vec{\psi}\right)\right| = r^2\sin\theta$.