Seien $\{x, y, z\}$ die Koordinaten des $\mathbb{R}^3$, $\circ$ bzw. $\langle\,,\,\rangle$ das Skalarprodukt und $\wedge$ das Dachprodukt mit den Eigenschaften, dass für alle Koordinaten $\sigma, \xi \in \{x, y, z\}$ gilt:

$$d\sigma \wedge d\xi = -d\xi \wedge d\sigma\,, \qquad d\xi \wedge d\xi = 0\,, \qquad d \wedge f d\xi = df \wedge d\xi \tag{1}$$

Ferner sei

$$d\vec{r} := \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \qquad d\vec{A} := \begin{pmatrix} dy \wedge dz \\ dz \wedge dx \\ dx \wedge dy \end{pmatrix}, \qquad dV := dx \wedge dy \wedge dz \tag{2}$$

und $\partial_\xi f = \dfrac{\partial f}{\partial \xi}$ sowie $\vec{\nabla} = (\partial_x,\, \partial_y,\, \partial_z)^\top$.

0-Form: Sei $f = f(x, y, z)$ eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dann ist eine 0-Form ω_0 gegeben durch:

$$\omega_0 = f \tag{3}$$

1-Form: Sei $\vec{H}$ eine differenzierbare Abbildung $\vec{H} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Komponentenfunktionen $h_k = h_k(x, y, z)$, dann ist eine 1-Form ω_1 gegeben durch

$$\omega_1 \;=\; \vec{H} \circ d\vec{r} \;=\; h_1 dx + h_2 dy + h_3 dz \tag{4}$$

2-Form: Sei $\vec{B}$ eine differenzierbare Abbildung $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit den Komponentenfunktionen $b_k = b_k(x, y, z)$, dann ist eine 2-Form ω_2 gegeben durch:

$$\omega_2 \;=\; \vec{B} \circ d\vec{A} = \; b_1\, dy \wedge dz + b_2\, dz \wedge dx + b_3\, dx \wedge dy \tag{5}$$

3-Form: Sei $p = p(x, y, z)$ eine differenzierbare Abbildung $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dann ist eine 3-Form ω_3 gegeben durch:

$$\omega_3 \;=\; p\, dV \;=\; p\, dx \wedge dy \wedge dz \tag{6}$$

Sei U eine offene Teilmenge einer $k-$dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit[1]. Eine $k-$Form ω_k kann über eine solche $k-$dimensionale Menge U integriert werden. Beispielsweise lässt sich eine $2-$Form über eine Kreisfläche oder über die Oberfläche einer Kugel integrieren.

1. **Aufgabe:**

   (a) Zeige, dass für eine $0-$Form, siehe (3), gilt $d\omega_0 = \vec{\nabla} f \circ d\vec{r}$.

   (b) Eine Differentialform ω heißt geschlossen, wenn $d\omega = 0$ gilt. Entscheide jeweils begründet ob die Differentialform geschlossen ist:

      i. Gegeben sei die $1-$Form $\omega_1 = x e^y\, dx + \dfrac{1}{z}\, dy + x^2\, dz$.

      ii. Sei $\vec{g} = -\gamma \dfrac{M}{r^2} \cdot \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\gamma \dfrac{M}{r^3} \cdot \vec{r}$ die Fallbeschleunigung im Feld einer Punktmasse und $\omega = \vec{g} \circ d\vec{r}$.

   (c) Beweise, dass aus den Eigenschaften des Dachproduktes (1) direkt $d \wedge d\omega_0 = 0$ folgt.

   (d) Gibt es eine $0-$Form ω_0, mit der sich die Differentialform aus Aufgabenteil (1(b)ii) als $d\omega_0 = \vec{g} \circ d\vec{r}$ schreiben lässt? *Hinweis: Gravitationspotential*

2. **Aufgabe:** Beweise mit (1) und (2) die folgenden Aussagen:

   (a) Das Differential einer $1-$Form $\omega_1 = \vec{H} \circ d\vec{r}$ ergibt die $2-$Form

$$d\omega_1 \;=\; \left(\vec{\nabla} \times \vec{H}\right) \circ d\vec{A} \;=\; rot\left(\vec{H}\right) \circ d\vec{A}. \tag{7}$$

   (b) Das Differential einer $2-$Form $\omega_2 = \vec{B} \circ d\vec{A}$ ergibt die $3-$Form

$$d\omega_2 \;=\; \left(\vec{\nabla} \circ \vec{B}\right) dV \;=\; div\left(\vec{B}\right) dV. \tag{8}$$

[1] https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit

Um bei den Differentialformen im $\mathbb{R}^3$ Koordinatentransformationen anzuwenden, genügt es zu untersuchen wie sich die Terme $\overrightarrow{dr}$, $\overrightarrow{dA}$ und dV siehe (2) transformieren. Beginnen wir mit einer 1−Form und dem Element $d\overrightarrow{r}$. Da 1−Formen über Kurven integriert werden können, betrachten wir eine Kurve $\overrightarrow{\rho}(t)$ mit den Kompnenten $\rho_i(t)$ wobei $i \in \{1,2,3\}$. Das Anwenden einer Koordinatentransformation auf Differentialformen entspricht dem „Zurückziehen“ von Differentialformen, welches oft mit einem $*$ gekennzeichnet wird. Hier folgt

$$\rho^* d\overrightarrow{r} \;=\; d\overrightarrow{\rho}(t) \;=\; (d\rho_1,\, d\rho_2,\, d\rho_3)^\top \;=\; \left(\frac{d\rho_1}{dt}dt,\, \frac{d\rho_2}{dt}dt,\, \frac{d\rho_3}{dt}dt\right)^\top \;=\; \frac{d\overrightarrow{\rho}}{dt}dt$$

und damit für eine 1−Form (4):

$$\rho^*\omega_1 \;=\; \rho^*\left[\overrightarrow{H}\circ d\overrightarrow{r}\right] \;=\; \overrightarrow{H}(\overrightarrow{\rho}(t))\circ\frac{d\overrightarrow{\rho}}{dt}dt \tag{9}$$

1. **Aufgabe:**
   Eine Helix (Schraubenlinie) mit Radius R und Ganghöhe H lässt sich parametrisieren durch

   $$\overrightarrow{\rho}(t) = (\, R\cos(2\pi t)\,,\; R\sin(2\pi t)\,,\; Ht\,)^\top \tag{10}$$

   (a) Berechne den Startpunkt A auf der Helix für $t = 0$ und den Punkt B nachdem n Windungen durchlaufen wurden.

   (b) Betrachten wir das Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{r} = (x, y, z)^\top$.

      i. Berechne $\rho^*\left[\overrightarrow{V}\circ d\overrightarrow{r}\right]$ mit (10).

      ii. Das Vektorfeld $\vec{V}$ soll über 5 Windungen der Helix (10) integriert werden. Berechne den Wert des Integrals.

   (c) Berechne die Kurvenlänge $\int ds$ von 5 Windungen der Helix.
   Hinweis: Transformation (10) auf $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ anwenden. Es ist $ds = |d\vec{r}|$.

   (d) Sei $\vec{F} = -\dfrac{\gamma Mm}{r^3}\vec{r}$. Das Vektorfeld $\vec{F}$ soll über n Windungen der Helix (10) integriert werden.
   Berechne den Term $\rho^*\left[\overrightarrow{F}\circ d\overrightarrow{r}\right]$ und den Wert W_H des Integrals.

2. **Aufgabe:**
   Wir betrachten nun die gerade Verbindungslinie zwischen den Punkten A und B, siehe Aufgabe 1a. Die Gerade durch A und B lässt sich parametriesieren durch:

   $$\vec{l}_{AB}(t) \;=\; \overrightarrow{0A} + t\,\overrightarrow{AB} \;=\; (\, R + t\,[R\cos(2\pi n) - R]\,,\; Rt\sin(2\pi n)\,,\; Hnt\,)^\top$$

   (a) Zeige, dass $\vec{l}_{AB}$ für $t = 0$ den Punkt A und für $t = 1$ den Punkt B erreicht.

   (b) Sei $\alpha = R^2[\cos(2\pi n) - 1]$ und $\beta = 2R^2[1 - \cos(2\pi n)] + H^2n^2$. Zeige, dass $l^*_{AB}[\overrightarrow{r}\circ d\overrightarrow{r}] = (\alpha + t\beta)\,dt$.

   (c) Zeige, dass $l^*_{AB}\left[r^2\right] = R^2 + 2t\alpha + t^2\beta$ und berechne $l^*_{AB}\left[\overrightarrow{F}\circ d\overrightarrow{r}\right]$.

   (d) $\vec{F} = -\dfrac{\gamma Mm}{r^3}\vec{r}$ soll über die Strecke $\overline{AB}$ integriert werden, berechne das Integral W_{AB}.

3. **Aufgabe:**
   Sei $\vec{\rho}(t)$ jetzt eine beliebige stetig differenzierbare Kurve mit $\vec{\rho}(t_0) = \overrightarrow{0A}$ und $\vec{\rho}(t_1) = \overrightarrow{0B}$ und wieder $\vec{F} = -\dfrac{\gamma Mm}{r^3}\vec{r}$.

   (a) Berechne $\rho^*\left[\overrightarrow{F}\circ d\overrightarrow{r}\right]$ und das Integral W des Vektorfelds $\vec{F}$ über die Kurve $\vec{\rho}$. Gib eine physikalische Interpretation für W_H an.

   (b) Die Masse M befindet sich im Zentrum des Koordinatensystems und erzeugt das Gravitationsfeld $\vec{F}$. Bestimme den Abstand der beiden Punkte A und B, siehe Aufgabenteil 1a, zum Gravitationszentrum M im Ursprung. Ermittle jeweils die potentielle Energie in diesen beiden Punkten und die Energie, welche nötig ist um die Masse m von A nach B zu transportieren.

   (c) Löse alle Aufgaben für $\vec{F_\Lambda} = \left(-\dfrac{\gamma Mm}{r^2} + \dfrac{1}{3}\Lambda mr\right)\dfrac{\vec{r}}{r}$ und berechne $d\wedge\left[\overrightarrow{F}\circ d\overrightarrow{r}\right]$ sowie $d\wedge\left[\overrightarrow{F}_\Lambda\circ d\overrightarrow{r}\right]$.

Die Transformation des Elementes $d\overrightarrow{A} = (dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy)^\top$ wird beim Zurückziehen einer 2−Form, siehe (5), also z.B. $\omega_2 = \overrightarrow{B} \circ d\overrightarrow{A}$, benötigt. Da 2−Formen über zweidimensionale Flächen integriert werden können, betrachten wir dazu eine parametrisierte Fläche der Form[2]

$$\overrightarrow{\varphi}(s,t) = (\, \varphi_1(s,t)\,,\, \varphi_2(s,t)\,,\, \varphi_3(s,t)\,)^\top .$$

1. **Aufgabe:** (Zurückziehen einer 2-Form)
   (a) Sei wieder $\omega_2 = \overrightarrow{B} \circ d\overrightarrow{A}$, siehe (5). Beweise, dass $\varphi^*\omega_2 = \overrightarrow{B}(\overrightarrow{\varphi}(s,t)) \circ \left(\frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial s} \times \frac{\partial \overrightarrow{\varphi}}{\partial t} \right) ds \wedge dt$

   (b) Der magnetische Fluss Φ durch eine Fläche A ist das Flächenintegral der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$ über die Querschnittfläche A:
   $$\Phi = \iint_A \overrightarrow{B} \circ d\overrightarrow{A} \tag{11}$$
   Sei $\vec{B} = (0 \mid 0 \mid B)$ ein homogenes konstantes Magnetfeld in $z-$Richtung. Berechne den magnetischen Fluss durch die Kreisfläche $K_2 = \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 \le R^2\}$, welche durch $\overrightarrow{\varphi}(s,t) = (s\,\cos(t)\,,\, s\,\sin(t)\,,0)^\top$ mit $0 \le s \le R$ und $0 \le t \le 2\pi$ parametrisiert werden kann.

   (c) Berechne den Inhalt der Kreisfläche durch $\int_{K_2} \left| d\overrightarrow{A} \right|$.

   (d) Berechne die Oberfläche der Kugel durch $\int_{\partial K_3} \left| d\overrightarrow{A} \right|$. Hierbei ist $\partial K_3 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ der Rand der Kugel $K_3 = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}$. *Hinweis: Kugelkoordinaten benutzen, dabei ist der Radius R konstant!*

   (e) Sei T_3 der Torus im $\mathbb{R}^3$. Berechne die Torusoberfläche durch $\int_{\partial T_3} \left| d\overrightarrow{A} \right|$.

   (f) Sei $\vec{B}$ die magnetische Flussdichte eines magnetischen Dipols (in größerer Entfernung r zum Dipol), also
   $$\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3\vec{r}\,\langle \vec{m}, \vec{r} \rangle - \vec{m} r^2}{r^5}. \tag{12}$$
      i. Zeige, dass für $\vec{\varphi}(\phi,\theta) = R(\sin\theta\cos\phi,\, \sin\theta\sin\phi,\, \cos\theta)^\top$ gilt $\varphi^*\left[\vec{r} \circ d\overrightarrow{A}\right] = R^3 \sin\theta\, d\theta \wedge d\phi$.

      ii. Beweise, dass außerdem die Gleichung $\varphi^*[\vec{r}]\, R\sin\theta\, d\theta \wedge d\phi = \varphi^*\left[d\overrightarrow{A}\right]$ erfüllt ist.

      iii. Berechne das Integral der magnetischen Flussdichte $\vec{B}$, siehe (12), über die Kugeloberfläche ∂K_3.

2. **Aufgabe:**
   Der elektrische Fluss Φ im Vakuum durch die Fläche A wird durch die Gleichung
   $$\Phi = \iint_A \overrightarrow{E} \circ d\overrightarrow{A} \tag{13}$$
   beschrieben. Die Feldstärke einer Punktladung[3] der Ladung Q im Koordinatenursprung ist:
   $$\overrightarrow{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$
   (a) Berechne den elektrischen Fluss durch die Kugeloberfläche ∂K_3.

   (b) Zeige mit Teil 2a, dass $\Phi = 4\pi r^2 E$ wobei $E = \left|\overrightarrow{E}\right|$.

   (c) Betrachten wir eine Hohlkugel, deren Oberfläche mit der Ladung $Q_{\text{außen}}$ versehen wird. Begründe, dass das Innere der Hohlkugel feldfrei ist (Farradayscher Käfig).

   (d) Sei $\omega = \overrightarrow{E} \circ d\overrightarrow{A}$, berechne $d\omega$.

[2]Offensichtlich gilt für das totale Differential der Komponenten $d\varphi_k = \partial_s\varphi_k\, ds + \partial_t\varphi_k\, dt$ und damit

$$\varphi^*[dx_k \wedge dx_i] \;=\; (\partial_s\varphi_k\, ds + \partial_t\varphi_k\, dt) \wedge (\partial_s\varphi_i\, ds + \partial_t\varphi_i\, dt) \;=\; (\partial_s\varphi_k \cdot \partial_t\varphi_i - \partial_t\varphi_k \cdot \partial_s\varphi_i)\, ds \wedge dt$$

[3]Die gleiche Feldstärke erhält man außerhalb einer geladenen Kugel.

Eine 3−Form kann über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten integriert werden. Sei

$$\overrightarrow{\psi}\,(r,s,t) = (\ \psi_1\,(r,s,t)\,,\ \psi_2\,(r,s,t)\,,\ \psi_3\,(r,s,t)\ )^\top \tag{14}$$

die Parametrisierung einer dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Zurückziehen einer 3-Form $\omega_3 = p\,dV$ mit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erfolgt durch $\psi^*\omega_3 = p\left(\vec{\psi}\right)\psi^*\left[dx \wedge dy \wedge dz\right]$. Die Transformation des Volumenelementes $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ ist hier entscheidend.

1. **Aufgabe:**
   (a) Berechne $\psi^*\left[dx \wedge dy \wedge dz\right]$ bei Kugelkoordinaten $\vec{\psi}\,(r,\phi,\theta) = (r\sin\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\sin\phi,\ r\cos\theta)^\top$ und berechne das Kugelvolumen.
   (b) Löse Aufgabe (1a) für Zylinder- und Toruskoordinaten.
   (c) Sei $p\,(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$. Integriere die 3−Form $\omega_3 = p\,dV$ über die Kugel mit Radius R.
   (d) Beweise, dass sich allgemein für die Parametrisierung einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit (14) die Transformationsregel $\psi^*\left[dx \wedge dy \wedge dz\right] = det\left(D\overrightarrow{\psi}\right)\,dr \wedge ds \wedge dt$ ergibt und damit

$$\psi^*\omega_3 = p\left(\overrightarrow{\psi}\,(r,s,t)\right)\,det\left(D\overrightarrow{\psi}\right)\,dr \wedge ds \wedge dt.$$

2. **Aufgabe:**
   In zwei Dimensionen, also im $\mathbb{R}^2$, gibt es $0-, 1-$ und $2-$Formen. Die Nullform ist wieder $\omega_0 = f$ wobei f eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist. Mit dem Differential $d\omega_0$ erhält man eine 1−Form.
   (a) Berechne mit den Regeln des Dachproduktes die Struktur von 1− und 2−Formen im $\mathbb{R}^2$.
   (b) Eine $m-$Form kann über eine $m-$dimensionale Mannigfaltigkeit integriert werden. Berechne die Transformation in Polarkoordinaten
      i. für eine 1−Form, welche über den Kreisrand $\partial K_2 = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 = R^2\right\}$ integriert werden soll.
      ii. für eine 2−Form, welche über den Kreis $K_2 = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\right\}$ integriert werden soll.
   (c) Berechne allgemein alle Transformationsregeln für die Integration von $m-$Formen im $\mathbb{R}^2$

3. **Aufgabe:**
   Betrachten wir nun den eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$. Die Nullform ist wie immer $\omega_0 = f$ wobei f eine differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist.
   (a) Gib an welche $m-$Formen es in $\mathbb{R}$ gibt.
   (b) Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Stelle die Transformationsregel für eine 1−Form in $\mathbb{R}$ auf, also für $\varphi^*\omega_1$.

4. **Aufgabe:**
   Seien $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ die karthesischen Koordinaten des $\mathbb{R}^4$. Das Volumenelement im $\mathbb{R}^4$ ist gegeben durch $dV_4 = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$. Die Abbildung

$$\overrightarrow{\psi}_4\,(r,\theta_1,\theta_2,\phi) = \begin{pmatrix} r\,\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\phi) \\ r\,\sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\sin(\phi) \\ r\,\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ r\,\cos(\theta_1) \end{pmatrix} \tag{15}$$

   ist eine Parametrisierung für sphärische Koordinaten im $\mathbb{R}^4$ (Kugelkoordinaten).
   (a) Beweise $\psi_4^* dV_4 = r^3\sin^2(\theta_1)\sin(\theta_2)\ dr \wedge d\theta_1 \wedge d\theta_2 \wedge d\phi$ mit dem Dachprodukt.
   (b) Berechne das Volumen von $K_4 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid |\vec{x}| \leq R\right\}$. Bei (15) ist $\theta_1, \theta_2 \in [0,\pi]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$.