Seien $\{x_0, \ldots, x_4\}$ Koordinaten des fünfdimensionalen Minkowski Raumes

$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \tag{1}$$

wobei für die Zeitkoordinate $\widetilde{t}$ gilt $x_0 = c\widetilde{t}$. Der De-Sitter Raum ist die Untermannigfaltigkeit mit

$$r_\Lambda^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \tag{2}$$

mit r_Λ^2 =konstant.

1. **Aufgabe:**
   Zeige, dass durch die Koordinatentransformation $x_k\left(t, r, \theta, \phi\right)$ mit

   $$x_0 = \sqrt{r_\Lambda^2 - r^2}\sinh\left(\frac{ct}{r_\Lambda}\right), \; x_1 = \sqrt{r_\Lambda^2 - r^2}\cosh\left(\frac{ct}{r_\Lambda}\right), \; x_2 = r\sin\theta\cos\phi, \; x_3 = r\sin\theta\sin\phi, \; x_4 = r\cos\theta \tag{3}$$

   eine Parametrisierung für (2) gegeben ist, also die Gleichung erfüllt ist.

2. **Aufgabe:**
   (a) Berechne die Differentiale dx_i für $i \in \{0, \ldots, 4\}$.
   (b) Zeige, dass sich damit aus (1) die De Sitter Metrik in der Form

   $$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{r_\Lambda^2}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{r_\Lambda^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{4}$$

   herleiten lässt.

3. **Aufgabe:**
   Die Signatur der Metrik ist hier $(-, +, ..., +)$. Sei nun

   $$R_{nk} = \sum_a \left(\partial_a\Gamma^a_{kn} - \partial_k\Gamma^a_{an} + \sum_b \left(\Gamma^a_{ab}\Gamma^b_{kn} - \Gamma^a_{kb}\Gamma^b_{an}\right)\right) \text{ mit } \Gamma^h_{ik} = \frac{1}{2}\sum_n g^{hn}\left(\partial_i g_{kn} + \partial_k g_{ni} - \partial_n g_{ik}\right)$$

   sowie $R = \sum_n \sum_k g^{nk}R_{nk}$, dann haben Einstein's Feldgleichungen die Form

   $$R^i_k - \frac{1}{2}R\delta^i_k + \Lambda\delta^i_k = \frac{8\pi\gamma}{c^4}T^i_k. \tag{5}$$

   Für den leeren Raum ist $T^i_k = 0$ und wir erhalten:

   $$R^i_k - \frac{1}{2}R\delta^i_k = -\Lambda\delta^i_k \tag{6}$$

   Bestimme die Konstante r_Λ^2 in Gleichung (4) aus den Feldgleichungen für den leeren Raum.

4. **Aufgabe:**
   Sei $a\left(t\right)$ eine hinreichend oft stetig differenzierbare Funktion. Gegeben ist die Metrik

   $$ds^2 = -c^2d\bar{t}^2 + a^2\left(\bar{t}\right)\left\{d\bar{r}^2 + \bar{r}^2d\bar{\theta}^2 + \bar{r}^2\sin^2\bar{\theta}\, d\bar{\phi}^2\right\}. \tag{7}$$

   (a) Bestimme $a\left(\bar{t}\right)$, so dass die Metrik 7 eine Lösung von Einstein's Feldgleichungen (6) für den leeren Raum mit kosmologischer Konstanten ist.
   (b) Zeige, dass sich a in der Form $a\left(\bar{t}\right) = a_0\exp\left(cr_\Lambda^{-1}\bar{t}\right)$ schreiben lässt.
   (c) Zeige, dass sich durch die Koordinatentransformation

   $$\bar{t} = t + \frac{r_\Lambda}{2c}\ln\left[1 - \left(\frac{r}{r_\Lambda}\right)^2\right], \quad \bar{r} = \frac{r\exp\left(-\frac{c}{r_\Lambda}t\right)}{a_0\sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_\Lambda}\right)^2}}, \quad \bar{\theta} = \theta, \quad \bar{\phi} = \phi \tag{8}$$

   aus (7) wieder Metrik (4) ergibt.