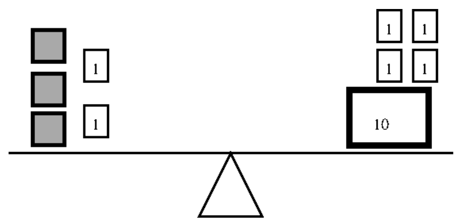
Das klassische Beispiel zur Veranschaulichung einer Gleichung ist die Balkenwaage. Ist eine solche Balkenwaage im Gleichgewicht, so befindet sich auf beiden Seiten die gleiche Masse (im Foto oben ist das offenbar nicht der Fall). Durch Hinzufügen oder Entfernen gleicher Massen auf **beiden** Seiten ändert sich der Gleichgewichtszustand der Waage nicht. Ähnliches gilt für Äquivalenzumformungen einer Gleichung, dabei muss auf **beiden** Seiten der Gleichung immer die selbe Rechenoperation ausgeführt werden.

Äquivalenzumformungen lassen den Wahrheitswert einer Gleichung unverändert.

Im Folgenden sollen Äquivalenzumformungen am Beispiel einer Waage betrachtet werden. Auf der linken Seite unserer Waage[1] befinden sich zwei Massestücke mit jeweils einer Masseneinheit, sagen wir $1\,kg$, sowie drei identische Gewichte mit uns unbekannter Masse (graue Kästen im Bild). Auf der rechten Seite befinden sich Massenstücke mit einer Gesamtmasse von 14 Masseneinheiten, dementsprechend also $14\,kg$.



Bezeichne x die Masse eines grauen Kastens (linke Seite der Waage), so lässt sich die dargestellte Situation durch die Gleichung

$$3x + 2 = 14$$

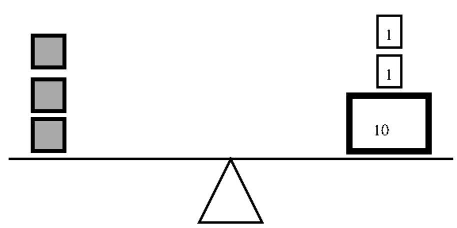
modellieren. Entfernt man auf beiden Seiten der Waage jeweils zwei Gewichtsstücke der Masse $1\,kg$, so bleibt die Waage im Gleichgewicht. Die entsprechende Äquivalenzumformung unserer Gleichung besteht in der Subtraktion von 2 auf beiden Seiten der Gleichung:

$$3x + 2 - 2 = 14 - 2$$

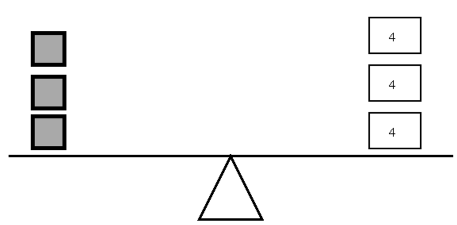
Ausrechnen beider Seiten ergibt dann offensichtlich die Gleichung

$$3x = 12$$

welche durch folgendes Bild dargestellt ist:

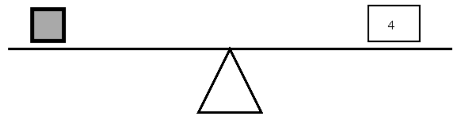


In unserem Beispiel würden wir nun die Gewichtstücke auf der rechten Seite ($10\,kg$ und zweimal $1\,kg$) der Waage durch drei $4\,kg$ Massen ersetzen. Die Gesamtmassen beträgt dann immernoch $12\,kg$, die Gleichung ist bleibt $3x = 12$:



Allerdings können wir nun auf jeder Seite „durch drei teilen“. Damit erhalten wir formal aus der Gleichung, sowie auch im Bild, die gesuchte Lösung:

[1]Anmerkung: Aufgrund des Hebelgesetzes wollen wir annehmen, dass die Gesamtschwerpunkte der Massenverteilungen jeder Seite immer den gleichen Abstand zum Drehpunkt haben.



$$x = 4$$

Die Lösung unserer Gleichung ergibt also eine Masse von $4\,kg$ für einen grauen Kasten. Die Lösung einer Gleichung kann auch als Lösungsmenge angegeben werden, die Schreibweise wäre hier $\mathbb{L} = \{4\}$.

Darstellung des Lösungsverfahrens

Wir verzichten nun auf die Bilder und konzentrieren uns auf den mathematischen Teil. Oft werden die Lösungschritte untereinander geschrieben, man startet mit der ursprünglichen Gleichung. Um zu kennzeichnen, dass bei einer Umformung von einer Zeile zur nächsten der Wahrheitsgehalt der Gleichung nicht verändert wurde, kann man einen Doppelpfeil (Äquivalenzpfeil) vor die umgeformte Zeile schreiben. Alternativ bietet sich dadurch auch die Möglichkeit die entsprechenden Lösungschritte, getrennt durch Äquivalenzpfeile, nebeneinander zu schreiben. Werden die Gleichungen untereinander geschrieben, können die jeweiligen Äquivalenzumformungen am Rand der Gleichung, getrennt durch einen senkrechten Strich, vermerkt werden.

Beispiel: $\frac{1}{2}x + 4 = 13 - x$

$$\begin{array}{rrcll}
 & \frac{1}{2}x + 4 & = & 13 - x & \quad | +x \\
\Leftrightarrow & \frac{3}{2}x + 4 & = & 13 & \quad | -4 \\
\Leftrightarrow & \frac{3}{2}x & = & 9 & \quad | \cdot 2 \\
\Leftrightarrow & 3x & = & 18 & \quad |: 3 \\
\Leftrightarrow & x & = & 6 &
\end{array}$$

Aufgabe 1

Löse die folgenden Gleichungen systematisch durch Äquivalenzumformungen.

(a) $6x - 5 = 5x - 6$ (b) $1 - x = 4x + 10$ (c) $0,5x + 1 = 0,4x - 3$ (d) $3\,(x - 2) = x + 2\,(x - 1)$

Unlösbare und allgemeingültige Gleichungen

Es gibt Gleichungen für die keine Lösung existiert. Immer wenn Äquivalenzumformungen zu einer **falschen** Aussage führen, wie zum Beispiel $-6 = -2$, gibt es keine Lösung der ursprünglichen Gleichung. Sobald eine falsche Aussage auftritt, kann man sich weitere Umformungen sparen. Es wäre zwar möglich die falschen Aussage $-6 = -2$ durch Division in die ebenfalls falsche Aussage $3 = 1$ weiter umzuformen, allerdings ist das nicht zielführend. Im Zusammenhang mit diesem Beispiel lässt sich übrigens eine Umformung erwähnen, die explizit keine Äquivalenzumformung ist: Multiplikation mit Null. Würde man nämlich die falsche Aussage $-6 = -2$ auf beiden Seiten mit Null multiplizieren, so erhielte man $0 = 0$, eine offenbar wahre Aussage. Da sich der Wahrheitswert der Gleichung ändert, ist die Multiplikation mit Null keine Äquivalenzumformung!

Im Folgenden betrachten wir eine Gleichung die allgemeingültig lösbar ist:

$$5x - (1 - x) = 6\left(x - \frac{1}{6}\right)$$

Nach Auflösen der Klammern steht hier

$$6x - 1 = 6x - 1.$$

Die Terme auf beiden Seiten der Gleichung sind identisch. Offenbar erfüllt jede reelle Zahl x diese Gleichung. Durch Subtraktion von $6x$ erhalten wir analog zu dem oben beschriebenen Verfahren jetzt eine wahre Aussage, nähmlich $-1 = -1$. Die Lösungsmenge der Gleichung lässt sich hier zum Beispiel durch $\mathbb{L} = \mathbb{R}$ angeben. Die Gleichungen in der folgenden Aufgabe haben entweder eine eindeutige Lösung, sind unlösbar oder allgemeingültig lösbar.

Aufgabe 2

Löse die folgenden Gleichungen systematisch durch Äquivalenzumformungen und gib jeweils die Lösungsmenge an.

(a) $x - 4 = 5x - 16$ (b) $x - 4 = 5x - 4$ (c) $0,5\,(2x - 4) = x - 2$ (d) $0,5\,(2x - 2) = x + 1$