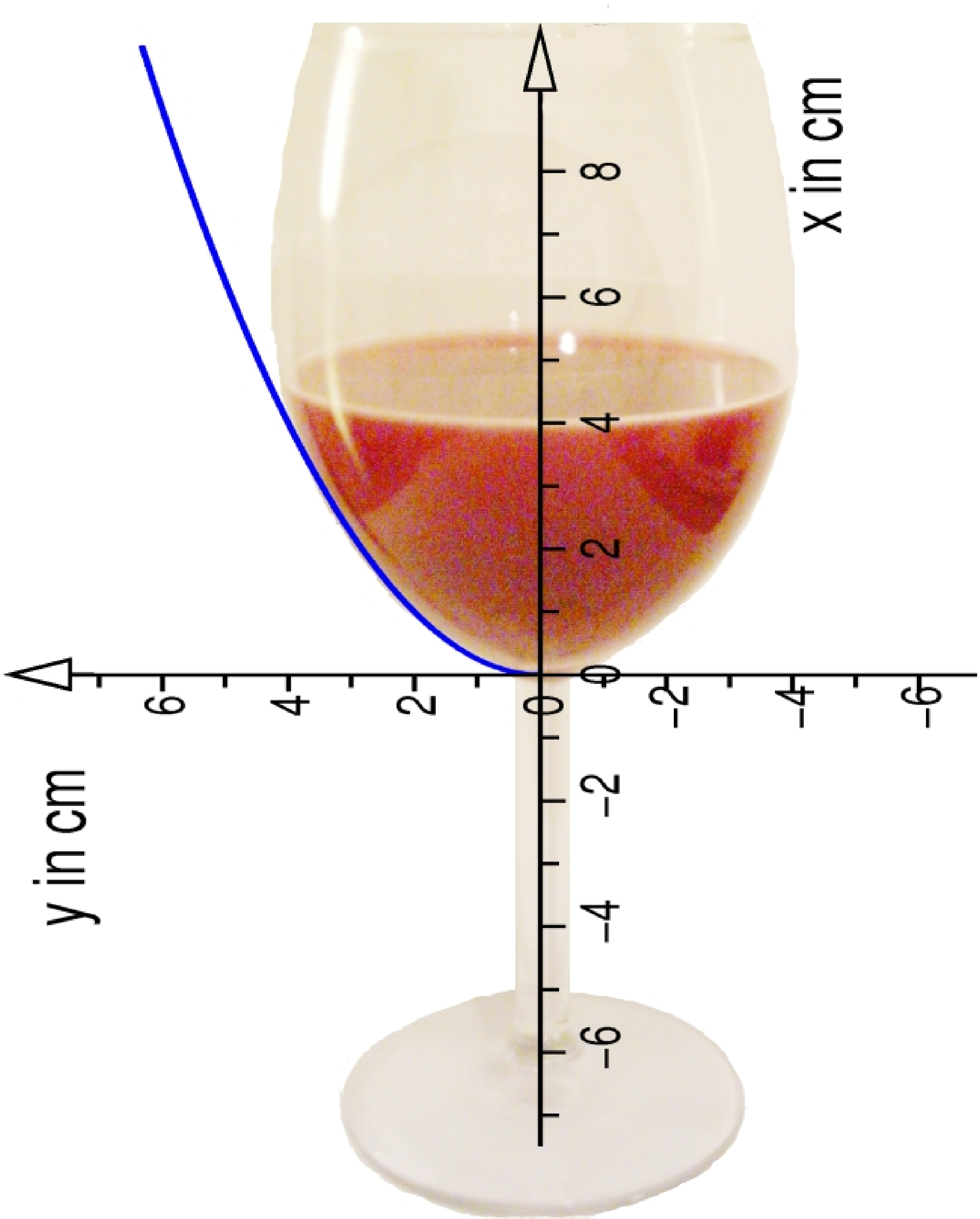
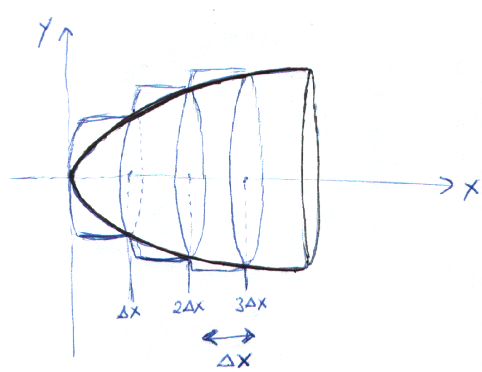


Die Kurve besitzt die Funktionsgleichung $f(x) = 2\sqrt{x}$

Idee: Wir benutzen stufenförmig angebrachte Zylinderscheiben der Höhe Δx um das Volumen des Körpers anzunähern.



Jede Zylinderscheibe hat die gleiche "Dicke" Δx. Der Radius r_1 der ersten Scheibe berechnet sich durch $f(\Delta x)$, der Radius der zweiten Scheibe ist $r_2 = f(2\Delta x)$, der der dritten Scheibe $r_3 = f(3\Delta x)$ usw. Der Rand des Weinglases ist dabei durch $f(x) = 2\sqrt{x}$ gegeben. Sei $k \in \mathbb{N}$, dann ist der Radius der $k-$ten Scheibe:

$$r_k = f(k\Delta x) = 2\sqrt{k\Delta x}$$

Das Volumen V_k der $k-$ten Zylinderscheibe ist damit

$$V_k = \pi r_k^2 h = \pi \left[2\sqrt{k\Delta x}\right]^2 \Delta x = 4\pi\,\Delta x^2\,k$$

Der Inhalt eines bis zur Höhe h gefüllten Glases lässt sich (als Rotationskörper) nun durch $\frac{h}{\Delta x}$ Zylinderscheiben annähern. Je kleiner Δx gewählt wird, desto mehr Scheiben gibt es. Näherungsweise ist das Volumen also

$$V = \sum_{k=1}^{\frac{h}{\Delta x}} V_k = 4\pi\,\Delta x^2 \cdot 1 + 4\pi\,\Delta x^2 \cdot 2 + 4\pi\,\Delta x^2 \cdot 3 + \cdots + 4\pi\,\Delta x^2 \cdot \frac{h}{\Delta x}$$

$$= 4\pi\Delta x^2 \left(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + \frac{h}{\Delta x}\right)$$

Mit der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

und $n = \frac{h}{\Delta x}$ folgt

$$V = 4\pi\Delta x^2 \frac{\frac{h}{\Delta x}\left(\frac{h}{\Delta x} + 1\right)}{2} = 2\pi\Delta x^2 \left\{\frac{h^2}{\Delta x^2} + \frac{h}{\Delta x}\right\} = 2\pi h^2 + 2\pi h\Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ erhalten wir unendlich viele Scheiben und den exakten Inhalt

$$V = 2\pi h^2$$

Wir erhalten das gleiche Ergebnis durch

$$V = \int_0^h \pi\left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = 2\pi h^2$$

Eine Kreisscheibe an der Stelle x hat den Radius $f(x)$ und damit die Fläche

$$A(x) = \pi f^2(x)$$

Ein Zylinder an der Stelle x mit der Dicke Δx hat das Volumen

$$\Delta V = \pi f^2(x)\,\Delta x$$

Ein Näherungswert für das Gesamtvolumen ist also:

$$V \approx \sum \Delta V = \sum \pi f^2(x)\,\Delta x$$

Für beliebig dünne Zylinder gilt $\Delta x \to dx$ und wir erhalten den exakten Wert:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f^2(x)dx}$$

Das Glas ist vom Punkt $a = 0$ bis zur Höhe $b = 4cm$ gefüllt, also:

$$\begin{aligned} V_{Wein} &= \int_0^4 \pi\left(2\sqrt{x}\right)^2 dx \\ &= 4\pi\int_0^4 x dx = 4\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\ &= 32\pi \approx 100 \end{aligned}$$

Wegen der Einheit cm ergibt sich $100cm^3 = 100ml$