1. **Aufgabe:**

   (a) Die folgenden Funktionen $f_i(x)$ sind Produkte von Funktionen. Hier lässt sich die Ableitung berechnen, indem zuerst das Produkt ausmultipliziert und dann das Ergebnis abgeleitet wird:

   $$f_1(x) = (2x+1)(3x+4) \qquad f_2(t) = (t-4)\left(t^2+3\right) \qquad f_3(x) = \left(x^3-5x\right)\sqrt{x}$$

2. **Aufgabe:**
   Für differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

   $$\frac{d}{dx}[u \cdot w] = \frac{du}{dx} \cdot w + u \cdot \frac{dw}{dx} \qquad \text{bzw.} \qquad [uw]' = u'w + uw' \tag{1}$$

   bzw: $[uw]' = u'w + uw'$.

   (a) Leite die Funktionen f_i aus Aufgabe 1a mit der Produktregel (1).

   (b) Beweise die **Produktregel** (1) mit der Definition der Ableitung $\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

3. **Aufgabe:**
   Hier muss die Produktregel (1) benutzt werden:
   $f(x) = xe^x \qquad g(x) = x^2e^x \qquad h(x) = x^3e^x \qquad k(x) = x^4e^x \qquad l(x) = x^5e^x \qquad p(x) = x^ne^x$
   $f_1(x) = 3xe^x \qquad f_2(x) = 5x^2e^x \qquad f_3(x) = (3x-2)e^x \qquad f_4(x) = -e^x\left(x^2-7x\right) \qquad f_5(x) = xe^{5x}$

4. **Aufgabe:**

   (a) Beweise, dass $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$ und $\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$. Hinweise[1] siehe unten.

   (b) Berechne die Ableitung: $f_1(x) = (2x+1)\sin x$, $f_2(x) = (2x+1)\cos x$, $f_3(x) = (2x+1)^2\sin x$

   (c) Berechne die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}\sin x$, $z(t) = \sqrt{t}\cos t$. Schreibe das Ergebnis jeweils als Bruch mit Hauptnenner.

   (d) Sei f eine beliebige differenzierbare Funktion und $n \in \mathbb{R}$, berechne die Ableitungen:
   $\frac{d}{dx}[x\,f(x)], \qquad \frac{d}{dx}\left[x^2\,f(x)\right], \qquad \frac{d}{dx}\left[x^3\,f(x)\right], \qquad \frac{d}{dx}\left[x^4\,f(x)\right], \qquad \frac{d}{dx}[x^n\,f(x)]$

   (e) Berechne die **erste, zweite und dritte Ableitung** von:
   $f_1(x) = \sin(x)\cos(x), \quad f_2(x) = \sin^2(x), \quad f_3(x) = \cos^2(x)$

   (f) Ermittle eine Regel für die Ableitung eines Produktes aus drei differenzierbare Funktionen f, g und h, also $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)]$.

5. **Aufgabe:**

   (a) Sei $x \neq 0$. Berechne die erste Ableitung mit der Produktregel:
   $f_1(x) = \frac{\sin x}{x}$ (Hinweis: $f_1(x) = x^{-1} \cdot \sin x$), $\quad f_2(x) = \frac{\cos(x)}{x}, \quad f_3(x) = \frac{e^x}{x}$

   (b) Für differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $w \neq 0$ gilt:

   $$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{w}\right] = \frac{\frac{du}{dx} \cdot w - u \cdot \frac{dw}{dx}}{w^2(x)} \qquad \text{bzw.} \qquad \left[\frac{u}{w}\right]' = \frac{u'w - uw'}{w^2} \tag{2}$$

   bzw: $\left[\frac{u}{w}\right]' = \frac{u'w-uw'}{w^2}$. Beweise (2) mit Hilfe von Produkt und Kettenregel. (Es gilt $\frac{u}{w} = u \cdot w^{-1}$)

   (c) Sei $t, x \neq 0$, $n \in \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Berechne die erste Ableitung:

      i. $p(t) = \frac{\cos(t)}{t^2}$, $w(t) = \frac{\sin t}{t^2}$, $f_n(x) = \frac{\sin x}{x^n}$, $g_1(x) = \frac{h(x)}{x}$, $g_2(x) = \frac{h(x)}{x^2}$, $g_n(x) = \frac{h(x)}{x^n}$

   (d) Berechne die Ableitung von $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ sowie von $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

[1] $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$; $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$; $\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = 0$; $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$