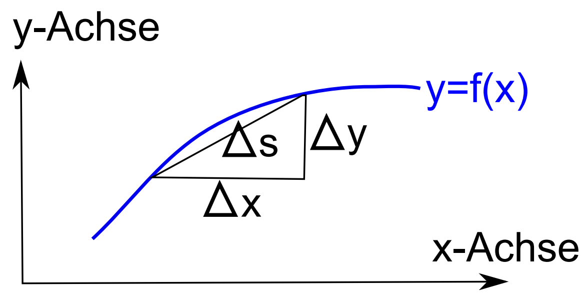
Idee:

Die Kurve wird gedanklich in viele kleine **Sekantenstücke** der Länge Δs zerlegt. In der Abbildung ist **ein** solches Sekantenstück dargestellt:



Offensichtlich gilt

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

und damit

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad = \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Summiert man alle Sekantenstücke auf, so erhält man für beliebig kleine Δs die exakte Länge L der Kurve. Es wird $\Delta s \to ds$, $\Delta x \to dx$ und $\Delta y \to dy$. Für die Länge $L_{[a,b]}$ der Kurve im Intervall $[a, b]$ gilt dann:

$$L_{[a,b]} \quad = \quad \int_a^b ds \quad = \quad \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$$

wegen $y = f(x)$ folgt $\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x)$ also:

$$\boxed{L_{[a,b]} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} \cdot dx}$$

1. **Aufgabe:**

   (a) Berechne die Länge der Kurve $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ über dem Intervall $[0, 4]$

   (b) Zeige, dass ein Kreis mit dem Radius r den Umfang $U = 2\pi r$ besitzt[1]

[1]Tipp: Viertelkreis ausrechnen und dabei $\int \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)$ benutzen !