Für differenzierbare Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $v\,(x) \neq 0$ gilt:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'\,(x)\,v\,(x) - u\,(x)\,v'\,(x)}{v^2\,(x)}$$

Beweis:

Zusammen mit Kettenregel

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{1}$$

und Produktregel folgt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' &= \left[u\,(x) \cdot \frac{1}{v\,(x)}\right]' = u'\,(x) \cdot \frac{1}{v\,(x)} + u\,(x) \cdot \left[\frac{1}{v\,(x)}\right]' \\
&= u'\,(x) \cdot \frac{1}{v\,(x)} - u\,(x)\,\frac{1}{v^2\,(x)} \cdot v'\,(x) \\
&= u'\,(x) \cdot \frac{v\,(x)}{v^2\,(x)} - u\,(x)\,\frac{v'\,(x)}{v^2\,(x)} \\
&= \frac{u'\,(x)\,v\,(x) - u\,(x)\,v'\,(x)}{v^2\,(x)}
\end{aligned}$$