

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und f eine Funktion mit $f(x) \neq 0$ für $a < x < b$. Die Funktion rotiert im Intervall $[a, b]$ um die x -Achse. Gesucht ist die Oberfläche oder Mantelfläche des entstehenden Rotationskörpers.

An der Stelle x ist der **Umfang** des Rotationskörpers

$$U = 2\pi f(x)$$

Um die Mantelfläche zu bekommen, werden infinitesimal kleine Flächenstücke dM aufsummiert. Es ist

$$dM = U \cdot ds = 2\pi f(x) \cdot ds$$

wobei ds das **Linienelement** aus der Bestimmung der Kurvenlänge darstellt. Es gilt wieder

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx^2 = \left(1 + (f'(x))^2\right) dx^2$$

also

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

und damit:

$$M = \int dM = \int 2\pi f(x) ds = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

also

$$M_{[a,b]} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

Aufgabe:

Berechne die Oberfläche einer Kugel mit Radius r .