

BEDEUTUNG VON FUNKTION UND ABLEITUNGEN:

Funktionswert $f(x_P)$: Die zur Stelle x_P gehörende y -Koordinate.

Erste Ableitung $f'(x_P)$: Steigung (oder Änderung) der Funktion f an der Stelle x_P .

Zweite Ableitung $f''(x_P)$: **1)** Änderung der Steigung von f an der Stelle x_P .

$$\mathbf{2)} \text{ Die Krümmung einer Funktion } f \text{ an der Stelle } x_P \text{ ist } K(x_P) = \frac{f''(x_P)}{(1 + f'(x_P)^2)^{3/2}}.$$

In einer Extremstelle x_E gibt $f''(x_E)$ offensichtlich die Krümmung an.

$$\text{Dritte Ableitung } f'''(x_P): \text{ Die Krümmungsänderung ist } K'(x_P) = \frac{f'''(x_P)}{(1 + f'(x_P)^2)^{3/2}} - \frac{3f'(x_P)f''(x_P)^2}{(1 + f'(x_P)^2)^{5/2}}.$$

An Stellen x_W **ohne** Krümmung gilt $f''(x_W) = 0$, so dass der zweite Summand da verschwindet. Weil $(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}} > 0$ bestimmt dann die dritte Ableitung ob die Krümmungsänderung Null wird oder nicht, sowie ggf. deren Vorzeichen.

NULLSTELLEN:

Die Funktion f hat in x_N eine Nullstelle, wenn $f(x_N) = 0$. Nullpunkt: $(x_N | 0)$

EXTREMSTELLEN:

Die Funktion f hat einen Extrempunkt $(x_E | f(x_E))$, wenn **beide** Bedingungen erfüllt sind:

Notwendige Bedingung: $f'(x_E) = 0$ (Steigung der Funktion an der Stelle x_E ist Null)

Hinreichende Bedingung: $f''(x_E) \neq 0$ (Krümmung K der Funktion an der Stelle x_E ist **nicht** Null)

Außerdem gilt:

$$f''(x_E) < 0 \Rightarrow \text{lokales Maximum bei } x_E \text{ **oder** } f''(x_E) > 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum bei } x_E$$

WENDESTELLEN:

Die Funktion f hat einen Wendepunkt $(x_W | f(x_W))$, wenn **beide** Bedingungen erfüllt sind:

Notwendige Bedingung: $f''(x_W) = 0$ (Krümmung K der Funktion an der Stelle x_W ist Null)

Hinreichende Bedingung: $f'''(x_W) \neq 0$ (Krümmungsänderung K' an der Stelle x_W ist **nicht** Null)

Außerdem gilt:

$$f'''(x_W) < 0 \Rightarrow \text{die Kurve hat in } x_W \text{ lokal den stärksten Anstieg (Maximum der Ableitungsfunktion } f')$$

$$f'''(x_W) > 0 \Rightarrow \text{die Kurve hat in } x_W \text{ lokal das stärkste Gefälle (Minimum der Ableitungsfunktion } f')$$

SATTELPUNKT:

Wendepunkt mit Steigung Null: Steigung **und** Krümmung sind Null, die Krümmungsänderung von Null verschieden.

f hat einen Sattelpunkt $(x_S | f(x_S))$ wenn $f'(x_S) = 0$, $f''(x_S) = 0$ und $f'''(x_S) \neq 0$.