1. **Aufgabe:**
Das Herstellungsverfahren einer Fabrik soll auf Umweltverträglichkeit untersucht werden. Die Schadstoffkonzentration einer Chemikalie in der Luft (ab Produktionsstart bei $x = 0$) wird durch die Funktion

$$f(x) = 10xe^{-0,5x}$$

beschrieben. x ist die Zeit in Stunden und die Funktionswerte $f(x)$ geben die Konzentration in μg pro Kubikmeter Luft an. Mit Einheiten ist die Funktion also durch $f(x) = 10\frac{\mu g}{m^3 \cdot h}xe^{-0,5x/h}$ gegeben. (Auf die Einheiten darf in der Rechnung verzichtet werden. Im Antwortsatz muss das **Ergebnis mit Einheit** angegeben werden.)

   (a) Ermittle, welche Schadstoffkonzentration eine Stunde nach Produktionsstart vorhanden ist.
   (b) Berechne, wie hoch die Schadstoffkonzentration maximal werden kann.
   (c) Nach 8 Stunden wird der Betrieb eingestellt. Ermittle die maximale Schadstoffkonzentration nach Einstellung des Betriebes (d.h. im Intervall $[8, 24]$).
   (d) Berechne den Zeitpunkt, an dem die Schadstoffkonzentration am stärksten sinkt.
   (e) Zeige, dass $F(x) = -20(x+2)e^{-0,5x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
   (f) Bestimme rechnerisch die mittlere Schadstoffkonzentration während der ersten fünf Stunden.
   (g) Gib einen Lösungsansatz an, mit dem sich berechnen lässt ab welchem Zeitpunkt die Konzentration unter 1% des Maximalwertes gesunken ist. Ermittle mit dem GTR diesen Zeitpunkt. (Die Gleichung ist nur numerisch lösbar.)
   (h) Als Alternative wird ein anderes Herstellungsverfahren untersucht. Die Schadstoffkonzentration wird jetzt durch die Funktion $h(x) = 5xe^{-0,3x^2}$ beschrieben. Vergleiche beide Verfahren. Nimm dabei Bezug auf die Aufgaben 1a) bis 1f) und bewerte beide Verfahren im Sachzusammenhang.

2. **Aufgabe:**
Bei einem Medikament ist die Konzentration pro Liter Blut durch die Funktion

$$f(x) = 4xe^{-0,2x}$$

gegeben. x ist die Zeit in Stunden (nach der Einnahme des Medikaments bei $x = 0$) und die Funktionswerte $f(x)$ geben die Konzentration in mg.

   (a) Ermittle, welche Konzentration eine Stunde nach der Einnahme des Medikamentes vorhanden ist.
   (b) Berechne an welcher Stelle die notwendige Bedingung für einen Extremwert erfüllt ist.
   (c) Zeige, dass $f''(x) = \frac{4}{25}(x-10)e^{-0,2x}$ und $f'''(x) = \frac{4}{125}(15-x)e^{-0,2x}$ und berechne den Zeitpunkt, an dem die Konzentration am stärksten sinkt.
   (d) Zeige, dass $F(x) = -20(x+5)e^{-0,2x}$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
   (e) Ermittle rechnerische wie hoch die mittlere Konzentration im Blut während der ersten fünf Stunden nach Einnahme des Medikamentes ist.
   (f) Gib den Grenzwert der Funktion für $x \to \infty$ an.

3. **Aufgabe:**
Sei $\mathcal{K}$ ein Körper mit homogener Dichte ρ, welcher durch die Rotation der Funktion f im Intervall $[a, b]$ um die $x-$Achse entsteht. Das Trägheitsmoment J_x des um die $x-$Achse rotierenden Körpers $\mathcal{K}$ lässt sich dann durch die Formel

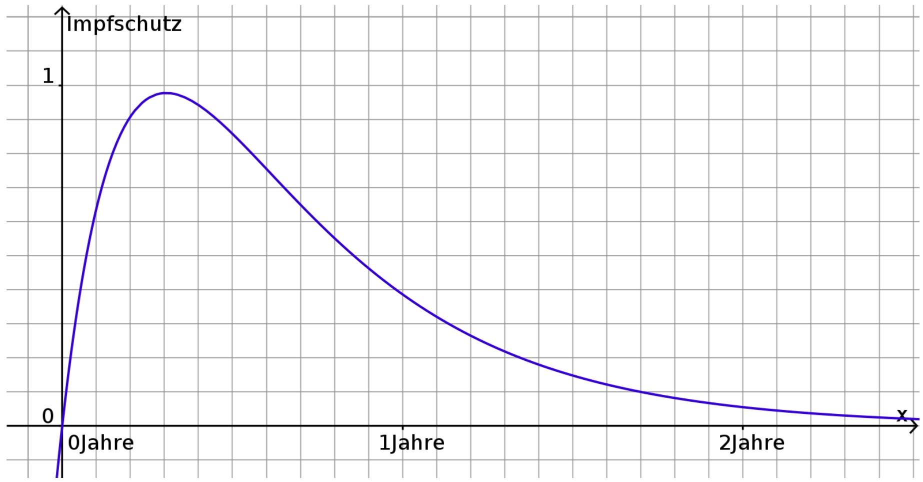
$$J_x = \frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b f^4(x)\,dx$$

berechnen.

   (a) Berechne das Trägheitsmoment J_x eines Rotationsparaboloids aus Aluminium (Dichte $\rho \approx 2,7\frac{g}{cm^3}$), welcher durch die Rotation der Parabel[1] $f = \frac{1}{cm} \cdot x^2$ im Intervall $[0\,cm\,; 3\,cm]$ um die $x-$Achse entsteht.
   (b) Zeige, dass das Trägheitsmoment einer Kugel mit Masse M und Radius R durch $J_x = \frac{2}{5}MR^2$ gegeben ist. Hinweis: Die Masse der Kugel ist durch $M = \rho V = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$ gegeben.

[1] Die Einheit $\frac{1}{cm}$ in der Funktionsgleichung f sorgt dafür, dass hier auch das Trägheitsmoment die richtige physikalische Einheit bekommt.

4. **Aufgabe:**
Sei $x \geq 0$. Durch die Funktion
$$f(x) = 3e^{-2x} - 3e^{-5x} \tag{1}$$
sei der Impfschutz f eines Impfstoffs nach der Impfung in Jahren x gegeben. Die Impfung erfolgt dabei zum Zeitpunkt $x = 0$. Der Impfschutz f ist dabei als Anteil, also als Dezimalbruch gegeben, siehe Abbildung:



(a) Gib den Impfschutz ein Jahr nach der Impfung in **Prozent** mit zwei Nachkommastellen an.

(b) Berechne wann der maximale Impfschutz erreicht ist und zu wie viel Prozent die geimpfte Person dann geschützt ist.

(c) Berechne zu welchem Zeitpunkt der Impfschutz am schnellsten steigt und am stärksten abnimmt. Ermittle wie viel Prozent der Impfschutz dann jeweils beträgt.

(d) Gib eine Stammfunktion F zur Funktion (1) an.

(e) Ein anderer Hersteller bietet einen Impfstoff an, dessen Impfschutz als Dezimalbruch nach der Impfung in Jahren x durch die Funktion
$$h(x) = 4,67\left(e^{-5x} - e^{-9x}\right)$$
gegeben ist.

i. Gib den maximalen Impfschutz dieses Impfstoff in Prozent mit zwei Nachkommastellen an.

ii. Ermittle wie viele **Wochen** nach der Impfung der maximale Impfschutz erreicht ist. (Die Einheit x in Jahren bezieht sich dabei auf das Jahr mit 52 Kalenderwochen)

iii. Zeichne die Funktion $h(x)$ mit in das Koordinatensystem oben.

(f) Sei $u(x) = |f(x) - h(x)|$ der **Unterschied** der jeweiligen Impfschutzwerte. Skizziere die Funktion u im Bereich $0 \leq x \leq 2$ in ein geeignetes Koodinatensystem und gib an zu welchen Zeitpunkten der Unterschied der Wirksamkeit am lokal kleinsten und am lokal größten ist (GTR benutzen!).

5. **Aufgabe:**
Im Intervall $[0, 2s]$ soll die Funktion
$$y(t) = \frac{25m}{8s^4} \cdot t^4 - \frac{50m}{3s^3} \cdot t^3 + \frac{100m}{s} \cdot t$$
den Weg-Zeit Zusammenhang bei einem Abbremsvorgang beschreiben.

(a) Zeige, dass die Geschwindigkeit v am Ende des Abbremsvorgangs Null ist.

(b) Zu welchem Zeitpunkt im Intervall $[0, 2s]$ nimmt die Beschleunigung einen Extremwert an?

(c) Wann wirkt die stärkste Kraft auf die Insassen des Fahrzeugs?

(d) Welche Kraft wirkt zu diesem Zeitpunkt auf einen Körper der Masse $70kg$?

6. **Aufgabe:**
Eine Bewegung ist gegeben durch die Weg-Zeit Funktion

$$y(t) = \frac{m}{s^3} \cdot t^3 - \frac{12m}{s^2} \cdot t^2 + \frac{48m}{s} \cdot t + 64m$$

(a) Welche Strecke y wurde nach $2s$ zurückgelegt?

(b) Welche Momentangeschwindigkeit v hat das Objekt zum Zeitpunkt $t = 1s$?

(c) Berechne die Beschleunigung a zum Zeitpunkt $t = 2s$ und zum Zeitpunkt $t = 5s$.

(d) Welche Kraft F wirkt auf eine Person der Masse $75kg$ zum Zeitpunkt $t = 9s$, wenn diese nach der oben angegebenen Funktionsgleichung bewegt wird.

(e) Zu welchem Zeitpunkt ist die Bewegung kräftefrei ?

(f) Zu welchem Zeitpunkt ist die Geschwindigkeit minimal?