Seien f und z differenzierbare Funktionen, dann ist die Verknüpfung

$$(f \circ z)(x) := f(z(x))$$

wieder eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung $f'(x) = \frac{df}{dx}$ durch

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \tag{1}$$

gegeben ist.

Beweis:

Mit der Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{x_l \to x} \frac{f(x) - f(x_l)}{x - x_l}$$

lässt sich Gleichung (1) leicht beweisen. Mit der Bezeichung $z_l = z(x_l)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} = f'(z(x)) &= \lim_{x_l \to x} \frac{f(z(x)) - f(z(x_l))}{x - x_l} \\
&= \lim_{x_l \to x} \frac{f(z(x)) - f(z(x_l))}{z(x) - z(x_l)} \cdot \frac{z(x) - z(x_l)}{x - x_l} \\
&= \underbrace{\lim_{z_l \to z} \frac{f(z) - f(z_l)}{z - z_l}}_{\frac{df}{dz}} \cdot \underbrace{\lim_{x_l \to x} \frac{z(x) - z(x_l)}{x - x_l}}_{\frac{dz}{dx}} \quad = \quad \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}
\end{aligned}$$