Sei $n \in \mathbb{N}$, es soll bewiesen werden, dass für ein Polynom vom Gerad n gilt:

$$\frac{d}{dx}\left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right] = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1 \tag{1}$$

Satz 1: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $h \in \mathbb{R}$. Es ist

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \mathcal{O}\left(h^2\right) \tag{2}$$

wobei $\mathcal{O}\left(h^2\right)$ alle Terme höherer Ordnung von h, d.h. in diesem Fall ab h^2, enthält.

Beweis: Für $n = 2$ stimmt Gleichung (2) offensichtlich, da

$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2 = x^2 + 2x^{2-1}h + \mathcal{O}\left(h^2\right). \tag{3}$$

Wenn (2) für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt die Formel auch für $k+1$:

$$\begin{aligned}
(x+h)^{k+1} &= (x+h)^k\,(x+h) \overset{(2)}{=} \left[x^k + kx^{k-1}h + \mathcal{O}\left(h^2\right)\right](x+h) \\
&= x^{k+1} + kx^k h + \mathcal{O}\left(h^2\right)\cdot x \;+\; x^k h + kx^{k-1}h^2 + \mathcal{O}\left(h^2\right)\cdot h \\
&= x^{k+1} + \underbrace{kx^k h + x^k h}_{(k+1)x^k h} + \underbrace{\mathcal{O}\left(h^2\right)\cdot x + kx^{k-1}h^2 + \mathcal{O}\left(h^2\right)\cdot h}_{\text{Terme mit } h^2, h^3, \ldots, h^{k+1}} \\
&= x^{k+1} + (k+1)\,x^k h + \mathcal{O}\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

Offensichtlich erhält man Gleichung (2) für $n = k+1$. Damit ist gezeigt:

$$\text{"Wenn (2) für } k \in \mathbb{N} \text{ gilt, so auch für } k+1.\text{"} \tag{4}$$

Gleichung (2) ist für $k = 2$ erfüllt. Aus (4) folgt dann, das die Gleichung auch für $k+1 = 2+1 = 3$ gilt. Also muss sie wegen (4) auch für $n = 4$, $n = 5$ usw. gelten. Damit ist bewiesen, dass Gleichung (2) für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. $\square$
Dieses Beweis-Verfahren nennt man vollständige Induktion.

Satz 2: Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = nx^{n-1}$$

Beweis:
Mit Gleichung (2) ergibt sich:

$$\frac{d}{dx}\left[x^n\right] = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} \overset{(2)}{=} \lim_{h\to 0}\frac{x^n + nx^{n-1}h + \mathcal{O}\left(h^2\right) - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \mathcal{O}(h) = nx^{n-1} \quad \square$$

Satz 3: Der Ableitungsoperator $\frac{d}{dx}$ ist linear, d.h. für $a \in \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen f, g gilt:

$$\frac{d}{dx}\left[f+g\right] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} \qquad \frac{d}{dx}\left[a\cdot f\right] = a\cdot\frac{df}{dx}$$

Beweis:
Mit der Definition der Ableitung ergibt sich

$$\frac{d}{dx}\left[f+g\right] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

und

$$\frac{d}{dx}\left[a\cdot f\right] = \lim_{h\to 0}\frac{af(x+h) - af(x)}{h} = a\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a\cdot\frac{df}{dx} \qquad \square$$

Ableitung des Polynoms: Offensichtlich folgt aus den Sätzen 1 bis 3 die Ableitungsregel (1) für Polynome.